Exercices de mise en route sur les fonctions

Exercice 1.

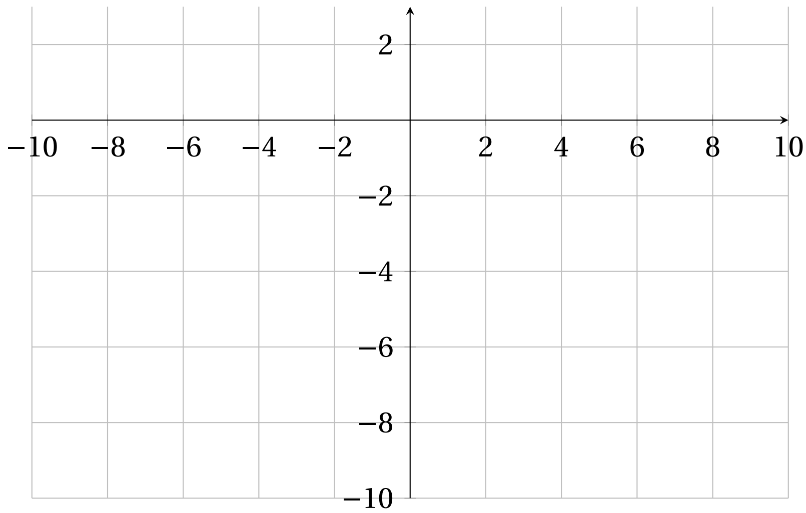
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$.

1. Déterminer le sens de variation de f.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 2[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}$.

1. Résoudre $f(x) = 0$.
2. On note f', la fonction dérivée de f.
   (a) Démontrer que pour tout réel x de $]-\infty\ ;\ 2[$: $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.
   (b) Déterminer les variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente D à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4. Tracer la droite D et une esquisse de la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-dessous .



Exercice 3.

Un camion doit parcourir un trajet de 200 km, on suppose que sa vitesse (en km/h), noté x est constante.
La consommation de carburant du camion est de $6 + \dfrac{x^2}{800}$ litres de gasoil par heure avec un prix du gasoil au litre de 1 € et le chauffeur est payé 10 € de l'heure.

1. Exprimer le temps de trajet t en fonction de x.
2. En déduire le coût en carburant sur l'ensemble du trajet en fonction de x puis le coût du chauffeur sur l'ensemble du trajet en fonction de x.
3. Montrer que le coût total du trajet en fonction de x est $\mathrm{C}(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{3\,200}{x}$.
4. Etudier les variations de la fonction C sur $]0\ ;\ +\infty[$.
5. En déduire quelle doit à être la vitesse du camion pour que le coût total du trajet soit minimal

Exercice 4.

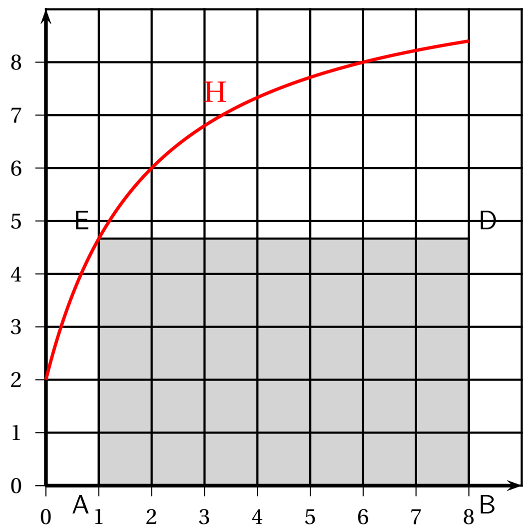
Partie A

Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $P(x) = -10x^2 - 40x + 120$.

Partie B

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé. La courbe H représentée sur le graphique ci -dessous est l'ensemble des points de l'hyperbole d'équation : $h(x) = \dfrac{10x+4}{x+2}$ avec x appartenant à l'intervalle [0 ; 8]. Pour toute abscisse x dans l'intervalle [0 ; 8], on construit le rectangle ABDE comme indiqué sur la figure. On donne les informations suivantes :

- A et B sont sur l'axe des abscisses ;
- A est d'abscisse x ;
- B et D ont pour abscisse 8 ;
- E appartient à la courbe H ;
- D et E ont la même ordonnée.



L'objectif de ce problème est de déterminer la ou les valeurs éventuelles x de l'intervalle [0 ; 8] correspondant à un rectangle ABDE d'aire maximale.

1. Déterminer l'aire du rectangle ABDE lorsque $x = 0$.
2. Déterminer l'aire du rectangle ABDE lorsque $x = 4$.

On définit la fonction f qui à tout réel x de [0 ; 8], associe l'aire du rectangle ABDE.

3. Montrer que : $f(x) = \dfrac{-10x^2 + 76x + 32}{x+2}$.
4. Répondre au problème posé.