Correction - Exercices de mise en route sur les fonctions

Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$.

1. Déterminer le sens de variation de f.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Correction

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   Alors $f'(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

   Comme pour tout x , $(x-3)^2 \geqslant 0$.

   On en déduit que $\boxed{f \text{ est } \textbf{croissante} \text{ sur } \mathbb{R}.}$

2. On sait que l' l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative C_f de f au point d'abscisse α est : $y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$

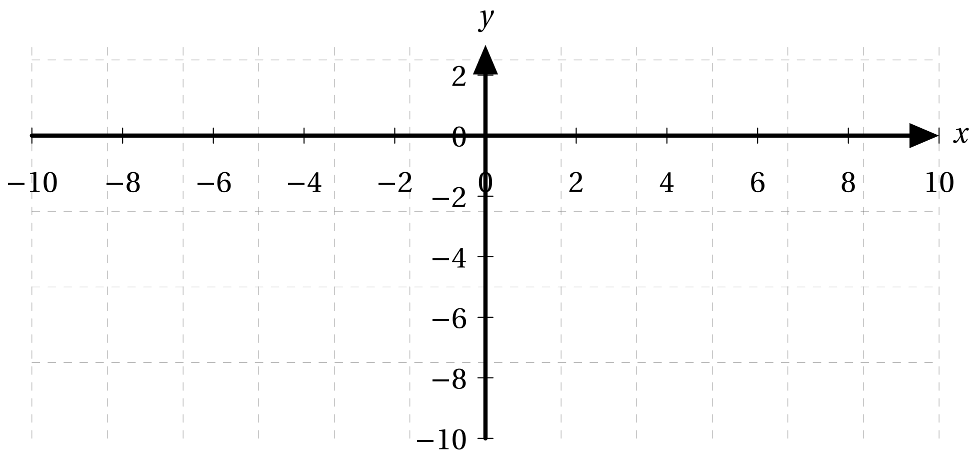
   Comme $f'(0) = 9$ et $f(0) = 0$

   Donc $\boxed{\text{Equation de la tangente } \mathrm{T}_0 \text{ est } y = 9x.}$

Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 2[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-4x+8}{x-2}$.

1. Résoudre $f(x)=0$.
2. On note f', la fonction dérivée de f.
   (a) Démontrer que pour tout réel x de $]-\infty\ ;\ 2[$: $f'(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.
   (b) Déterminer les variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente D à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4. Tracer la droite D et une esquisse de la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-dessous .



Correction

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 2[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-4x+8}{x-2}$.

1. On doit résoudre $f(x)=0 \iff \dfrac{x^2-4x+8}{x-2}$
   $\iff x^2-4x+8=0$

   On détermine le discriminant $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times8=16-32=-16>0$

   Le discriminant étant négatif, le polynôme n'admet pas de racines réelles

   Donc $\boxed{\text{léquation } f(x)=0 \text{ na pas de solution sur }]-\infty\ ;\ 2[}$

2. On note f', la fonction dérivée de f.
   (a) On a $f(x)=\dfrac{x^2-4x+8}{x-2}$

   La fonction f est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 2[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]-\infty\ ;\ 2[$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-\infty\ ;\ 2[$.

   On a $f=\dfrac{u}{v}$ alors $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

   On pose : $u(x)=x^2-4x+8$ et $u'(x)=2x-4$ puis $v(x)=x-2$ et $v'(x)=1$

D'où $f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x-2) - 1 \times \left(x^2 - 4x + 8\right)}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - x^2 + 4x - 8}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$.

Donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}.}$

(b) Comme $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

On peut en déduire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		2
x		$-$	0	$+$	
$x-4$		$-$		$-$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	‖
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖

Par conséquent le tableau de variations

x	$-\infty$		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
Variation de f		$\nearrow$		$\searrow$	‖

3. Déterminer une équation de la tangente D à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

   On sait que (D) a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

   Avec $f'(1) = \dfrac{1 \times (1-4)}{(1-2)^2} = \dfrac{-3}{1} = -3$

   et $f(1) = \dfrac{1^2 - 4 + 8}{1-2} = \dfrac{5}{-1} = -5$

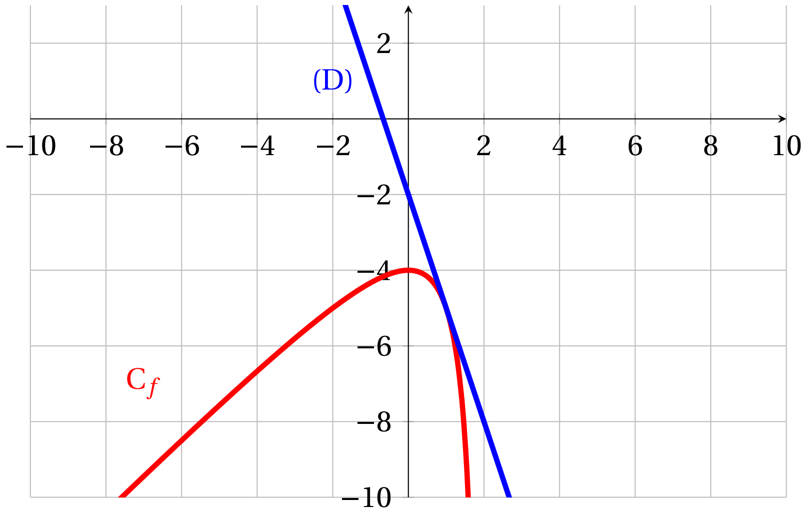
   Alors (D) $\quad y = -3(x-1) + (-5)$

   (D) $\quad y = -3x + 3 - 5$

   (D) $\quad y = -3x - 2$

   Donc $\boxed{\text{Equation de la tangente (D) est } y = -3x - 2.}$

4. Réprésentation graphique de la courbe représentative de la fonction f et de la droite (D) :


(D)
C_f
2
−2
−4
−6
−8
−10
−10 −8 −6 −4 −2 2 4 6 8 10

Exercice 3.

Un camion doit parcourir un trajet de 200 km, on suppose que sa vitesse (en km/h), noté x est constante.
La consommation de carburant du camion est de $6+\dfrac{x^2}{800}$ litres de gasoil par heure avec un prix du gasoil au litre de 1 € et le chauffeur est payé 10 € de l'heure.

1. Exprimer le temps de trajet t en fonction de x.
2. En déduire le coût en carburant sur l'ensemble du trajet en fonction de x puis le coût du chauffeur sur l'ensemble du trajet en fonction de x.
3. Montrer que le coût total du trajet en fonction de x est $\mathrm{C}(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{3200}{x}$.
4. Etudier les variations de la fonction C sur $]0\,;\,+\infty[$.
5. En déduire quelle doit à être la vitesse du camion pour que le coût total du trajet soit minimal

Correction

1. Le camion fait $200km$ à la vistesse constante de xkm/h
   D'où $t=\dfrac{200}{x}$
   Donc $\boxed{\text{Le temps de trajet est} t=\dfrac{200}{x} \text{ heures.}}$
2. On a le temps $t=\dfrac{200}{x}$ ainsi que le coût du carburant $6+\dfrac{x^2}{800}$
   D'où $\left(6+\dfrac{x^2}{800}\right)\times\dfrac{200}{x}=\dfrac{1200}{x}+\dfrac{x}{4}$
   Donc $\boxed{\text{Le coût en carburant est } \dfrac{1200}{x}+\dfrac{x}{4}}$
   De même le chauffeur est payé 10 € de l'heure
   D'où $\dfrac{200}{x}\times 10=\dfrac{2000}{x}$
   Donc $\boxed{\text{Le coût du chauffeur est } \dfrac{2000}{x} \text{ €.}}$
3. Comme le coût en carburant est $\dfrac{1200}{x}+\dfrac{x}{4}$ et le coût du chauffeur est $\dfrac{2000}{x}$.
   Alors $\mathrm{C}(x)=\dfrac{1200}{x}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{2000}{x}=\dfrac{x}{4}+\dfrac{3200}{x}$.
   Donc $\boxed{\text{le coût total du trajet est } \mathrm{C}(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{3200}{x}.}$
4. On a $\mathrm{C}(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{3200}{x}$.
   Alors la fonction C est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Alors $\mathrm{C}'(x)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3200}{x^2}=\dfrac{x^2-12800}{x^2}$.

   Et $\mathrm{C}'(x)=0$ pour $x=\sqrt{12800}=-\sqrt{6400\times 2}=-80\sqrt{2}$ ou $x=80\sqrt{2}$.

   $\mathrm{C}'(x)\geqslant 0$ pour x à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines (sachant que $x>0$)

   Remarque : on peut se limiter à $x\leqslant 130$ puisque la vitesse maximum en France est 130 km/h (et de toute façon, d'après la théorie de la relativité d'Einstein, aucun objet ne peut avoir une vitesse supérieure à celle de la lumière et encore, à condition d'avoir une masse nulle !)

x	0		$80\sqrt{2}$		130
$C'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variation de C	||	↘	$40\sqrt{2}$	↗	

5. Donc $\boxed{\text{le coût du trajet est minimal si la vitesse est égale à } 80\sqrt{2}\text{, soit environ 113 km/h.}}$

Exercice 4.

Partie A

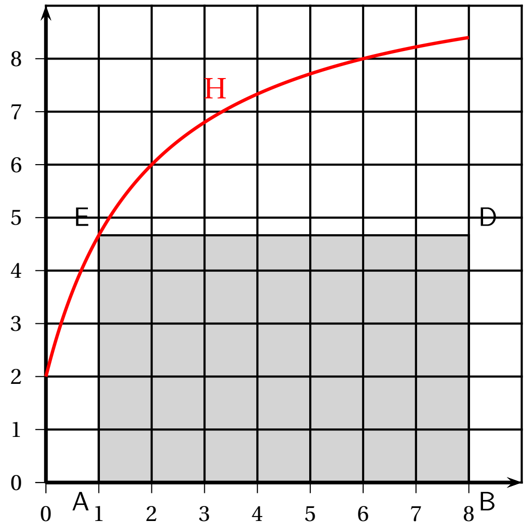
Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $P(x) = -10x^2 - 40x + 120$.

Partie B

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé. La courbe H représentée sur le graphique ci -dessous est l'ensemble des points de l'hyperbole d'équation : $h(x) = \dfrac{10x+4}{x+2}$ avec x appartenant à l'intervalle [0 ; 8].

Pour toute abscisse x dans l'intervalle [0 ; 8], on construit le rectangle ABDE comme indiqué sur la figure. On donne les informations suivantes :

- A et B sont sur l'axe des abscisses ;
- A est d'abscisse x ;
- B et D ont pour abscisse 8 ;
- E appartient à la courbe H ;
- D et E ont la même ordonnée.



L'objectif de ce problème est de déterminer la ou les valeurs éventuelles x de l'intervalle [0 ; 8] correspondant à un rectangle ABDE d'aire maximale.

1. Déterminer l'aire du rectangle ABDE lorsque $x = 0$.
2. Déterminer l'aire du rectangle ABDE lorsque $x = 4$.

On définit la fonction f qui à tout réel x de [0 ; 8], associe l'aire du rectangle ABDE.

3. Montrer que : $f(x) = \dfrac{-10x^2 + 76x + 32}{x+2}$.
4. Répondre au problème posé.

Correction

Partie A

On a $\mathrm{P}(x) = -10x^2 - 40x + 120$ alors $\mathrm{P}(x)$ est un polynôme du second degré.

On détermine le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-40)^2 - 4 \times (-10) \times 120 = 6400 > 0$

Le discriminant étant positif, le polynôme admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{40 - 80}{-20} = \frac{-40}{-20} = 2$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{40 + 80}{-20} = \frac{120}{-20} = -6.$$

On en déduit le signe du polynôme $-10x^2 - 40x + 120$ puisque le signe de $a = -10$ est négatif : d'où

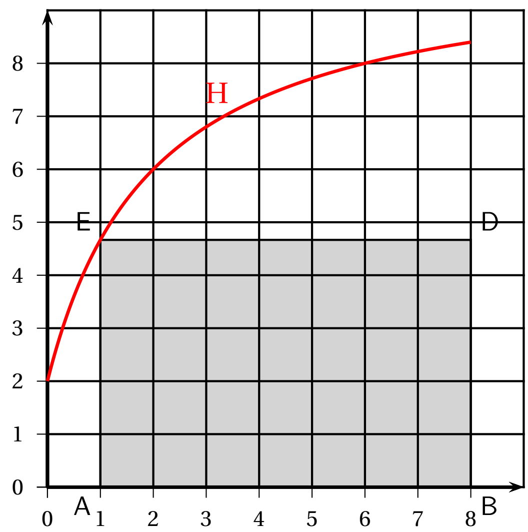
x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$-10x^2 - 40x + 120$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Partie B

On doit déterminer la ou les valeurs de x de l'intervalle $[0\,;\,8]$ tel que l'aire du rectangle ABDE soit maximale.

On a

- A et B sont sur l'axe des abscisses ;
- A est d'abscisse x ;
- B et D ont pour abscisse 8 ;
- E appartient à la courbe H ;
- D et E ont la même ordonnée.



Pour rappel, l'aire d'un rectangle est égale au produit de la longueur par la largeur

Donc ici, $\mathscr{A}_{\mathrm{ABDE}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AE}$

1. On doit déterminer l'aire du rectangle ABDE lorsque $x = 0$

   Alors $\mathrm{A}(0;0)$, $\mathrm{B}(8;0)$, $\mathrm{E}(0;2)$ et $\mathrm{D}(8;2)$

   $$\text{puisque } x_{\mathrm{E}} = h(0) = \frac{10 \times 0 + 4}{0 + 2} = 2 \text{ , } x_{\mathrm{D}} = x_{\mathrm{B}} = 8 \text{ et } y_{\mathrm{D}} = y_{\mathrm{E}} = 2$$

   D'où $\mathrm{AB} = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} = 8 - 0 = 8$ et $\mathrm{AE} = y_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{A}} = 2 - 0 = 2$

   Comme $\mathscr{A}_{\mathrm{ABDE}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AE} = 8 \times 2 = 16$

   Donc $\boxed{\text{Si } x = 0, \text{ alors } \mathscr{A}_{\mathrm{ABDE}} = 0}$

2. On doit déterminer l'aire du rectangle ABDE lorsque $x=4$

   Alors $\mathrm{A}(4;0)$, $\mathrm{B}(8;0)$, $\mathrm{E}\left(4;\dfrac{22}{3}\right)$ et $\mathrm{D}\left(8;\dfrac{22}{3}\right)$

   puisque $x_\mathrm{E}=h(4)=\dfrac{10\times4+4}{4+2}=\dfrac{44}{6}=\dfrac{22}{3}$, $x_\mathrm{D}=x_\mathrm{B}=8$ et $y_\mathrm{D}=y_\mathrm{E}=\dfrac{22}{3}$

   D'où $\mathrm{AB}=x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}=8-4=4$ et $\mathrm{AE}=y_\mathrm{E}-y_\mathrm{A}=\dfrac{22}{3}-0=\dfrac{22}{3}$

   Comme $\mathscr{A}_\mathrm{ABDE}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AE}=4\times\dfrac{22}{3}=\dfrac{88}{3}$

   Donc $\boxed{\text{Si } x=4, \text{ alors } \mathscr{A}_\mathrm{ABDE}=\dfrac{88}{3}}$

3. On pose la fonction f qui à tout réel x de $[0\,;\,8]$, associe l'aire du rectangle ABDE.

   Alors $\mathscr{A}_\mathrm{ABDE}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AE}$

   Or $\mathrm{AB}=x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}=8-x$ et $\mathrm{AE}=y_\mathrm{E}-y_\mathrm{A}=h(x)-0=h(x)$

   D'où $f(x)=(8-x)\times\dfrac{10x+4}{x+2}=\dfrac{(8-x)\times(10x+4)}{x+2}=\dfrac{80x+32-10x^2-4x}{x+2}=\dfrac{-10x^2+76x+32}{x+2}$

   Donc $\boxed{f(x)=\dfrac{-10x^2+76x+32}{x+2}}$

4. On cherche pour quelle(s) valeur(s) de x de l'intervalle $[0\,;\,8]$ tel que l'aire du rectangle ABDE soit maximale.

   On a $f(x)=\dfrac{-10x^2+76x+32}{x+2}$

   La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0\,;\,8]$.

   Comme $f=\dfrac{u}{v}$ et $f'=\dfrac{u'\times v-v'\times u}{v^2}$

   avec $u(x)=-10x^2+76x+32$ $u'(x)=-20x+76$ et $v(x)=x+2$ $v'(x)=1$

   Alors $f'(x)=\dfrac{(-20x+76)\times(x+2)-1\times(-10x^2+76x+32)}{(x+2)^2}$

   $f'(x)=\dfrac{-20x^2-40x+76x+152+10x^2-76x-32)}{(x+2)^2}$

   $f'(x)=\dfrac{-20x^2-40x+76x+152+10x^2-76x-32)}{(x+2)^2}$

   $f'(x)=\dfrac{-10x^2-40x+120}{(x+2)^2}$

   On constate que $f'(x)=\dfrac{\mathrm{P}(x)}{(x+2)^2}$, on peut alors en déduire le tableau de signes suivant :

x	0		2		8
$\mathrm{P}(x)$		$+$	0	$-$	
$(x+2)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

On en déduit donc le tableau de variations

x	0		2		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	16	$\nearrow$	36	$\searrow$	0

Conclusion $\boxed{\text{L'aire du rectangle ABDE est donc maximale de } 36u.a. \text{ quand } x=2}$