Rappel sur les fonctions

I Nombre dérivé en a d'une fonction

Nombre dérivé en a d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Pour tout nombre réel $a \in \mathrm{I}$ non nul et tel que $(a+h) \in \mathrm{I}$, on appelle taux d'accroissement de la fonction f en a, le nombre
$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
- On dit que la fonction f est **dérivable** en a, lorsque le taux d'accroissement $\tau(h)$ tend vers un nombre L lorsque h tend vers 0.

  Ce nombre L, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f en a, et est noté $f'(a)$:
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \mathrm{L}$$
- Le nombre dérivé $f'(a)$, lorsqu'il existe, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

II Fonctions dérivées

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

• On dit que f est dérivable sur I si f admet un nombre dérivé en tout point de I, c'est-à-dire si pour tout $a \in \mathrm{I}$, $f'(a)$ existe.

• On appelle **fonction dérivée** de f la fonction notée f' qui, à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée	f est définie sur	f est dérivable sur
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$	$\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les dérivées

u et v désignent deux fonctions quelconques, définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée
$ku,\ k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^2	$2u'u$
$u^n\ (n \in \mathbb{N})$	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$

III Equation de la tangente

Equation de la tangente

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et $\alpha \in \mathrm{I}$.

Alors, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative C_f de f au point d'abscisse α est :

$$y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$$

IV Applications de la dérivation

Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

V Extrema d'une fonction

Extrema d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Un **extremum** est un minimum ou un maximum.
- f présente un **maximum local** $m = f(x_0)$

  si il existe un intervalle $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ tel que pour tout $x \in \mathrm{J}$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
- f présente un **minimum local** $m = f(x_0)$

  si il existe un intervalle $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ tel que pour tout $x \in \mathrm{J}$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
- L'extremum est dit **global** lorsque $\mathrm{J} = \mathrm{I}$.

Tangente horizontale

Si $f(x_0)$ est un extremum local sur l'intervalle $]a;b[$, alors $f'(x_0) = 0$.

La courbe C_f représentative de la fonction f admet une tangente horizontale au point $(x_0; f(x_0))$.