Fonction exponentielle

I Définition

Théorème 1

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

On appelle cette fonction : fonction exponentielle et on la note provisoirement exp .

Conséquences immédiates liées à la définition de la fonction exponentielle

- La fonction exponentielle, $exp : x \mapsto exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $exp'(x) = exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $exp(0) = 1$

Nombre d'Euler

- On pose $exp(1) = e$; on obtient $e \simeq 2,718$, e est appelé le nombre d'Euler.
- On généralise à l'ensemble des nombres réels : $exp(x) = e^x$

Remarque : e^x se dit « exponentielle x » ou « e exposant n »

Histoire des mathématiques

Comme π , le nombre e est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique.

Ses premières décimales sont : $e \simeq 2,718281828459045235360287471352662497757247093699959574 96...$

Le nombre e est également un nombre transcendant. On dit qu'un nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers.

Le nombre $\sqrt{2}$ par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^2 = 2$. Un tel nombre est dit « algébrique » .

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse **Leonhard Euler** $(1707 ; 1783)$. C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car e est la première lettre du mot exponentiel.

Dans *« Introductio in Analysin infinitorum »* publié en 1748, Euler explique que : $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$

Rappelons que, par exemple, $5!$ se lit "factoriel 5" et est égal à $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$.

Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes.

Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de e

II Etude de la fonction exponentielle

Variations

La fonction exponentielle f tel que $f(x) = exp(x) = e^x$

- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- f est strictement positive sur $\mathbb{R}$
- $f'(x) = exp(x) = e^x$
- f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Tableau de variation :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$exp'(x)$	$+$
Variation de exp	$0 \nearrow +\infty$

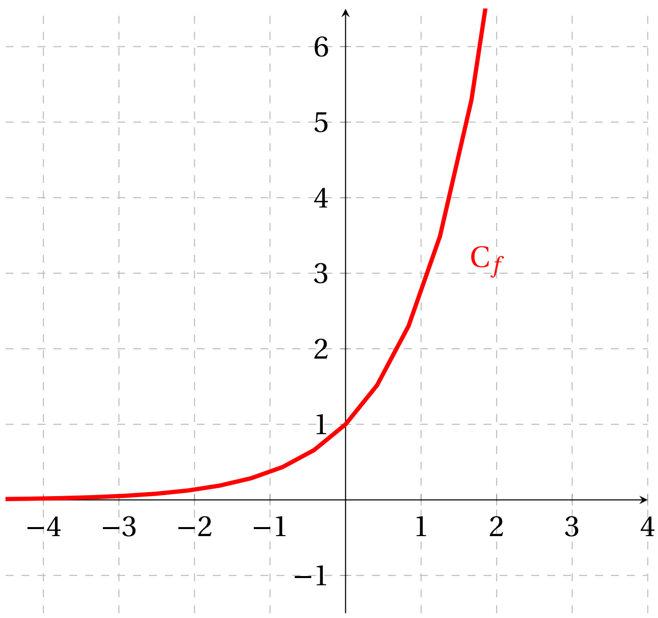
Démonstration :

La fonction f est définie, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$

Alors $f'(x) = exp(x) = e^x > 0$

Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Courbe représentative :



III Propriétés de la fonction exponentielle

Conséquences liées à cette nouvelle notation

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- Pour tous nombres a et b , $e^{a+b} = e^a \times e^b$ $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- Pour tout nombre a , et pour tout entier relatif n , $(e^a)^n = e^{a\times n}$

Remarque : La fonction exponentielle transforme les sommes en produit

Exemples : Simplifier les expressions : $\dfrac{(e^x)^2 \times e^x}{e^{4x}}$, $(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$ et $(e^x+e^{-x})^2+(e^x-e^{-x})^2$

.

- $\dfrac{(e^x)^2 \times e^x}{e^{4x}} = \dfrac{e^{2a} \times e^x}{e^{4x}} = \dfrac{e^{2x+x}}{e^{4x}} = \dfrac{e^{3x}}{e^{4x}} = e^{3x-4x} = e^{-x}$
- $$\begin{aligned}(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2 &= (e^{2x}+2\times e^x \times e^{-x}+e^{-2x})-(e^{2x}-2\times e^x\times e^{-x}+e^{-2x})\\ &= e^{2x}+2e^0+e^{-2x}-e^{2x}+2e^0-e^{-2x}\\ &= 2+2=4\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2 &= (e^{2x}+2\times e^x \times e^{-x}+e^{-2x})+(e^{2x}-2\times e^x\times e^{-x}+e^{-2x})\\ &= e^{2x}+2e^0+e^{-2x}+e^{2x}-2e^0+e^{-2x}\\ &= 2e^{2x}+2e^{-2x}=2(e^{2x}+e^{-2x})\end{aligned}$$

IV Equations - Inéquations

La fonction exponentielle f tel que $f(x) = exp(x) = e^x$

- Pour tous réels a et b , $a = b$ est équivalent à $e^a = e^b$
- Pour tous réels a et b , $a \leq b$ est équivalent à $e^a \leq e^b$

Démonstration :

- Raisonnement par l'absurde

  Si $a = b$ alors $e^a = e^b$

  et réciproquement si $e^a = e^b$ et on suppose $a \neq b$ avec $a < b$,

  comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

  alors $e^a < e^b$

  ce qui contredit l'hypothèse donc $a = b$.
- Cela découle du fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Exemples :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{-5x+1} = 1$.

  $e^{-5x+1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-5x+1} = e^0 \quad \Leftrightarrow \quad -5x+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{5}$

  Donc $S = \left\{\frac{1}{5}\right\}$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} = 0$.

  $e^{2x} = 0$

  Comme la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$

  Donc l'équation $e^{2x} = 0$ n'a pas de solution.

  Donc $S = \varnothing$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2} = e^4$.

  $e^{x^2} = e^4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$ ou $x = 2$

  Donc $S = \{-2; 2\}$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{-5x+1} > 1$

> Soit x un réel
>
> $e^{-5x+1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad -5x+1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -5x > -1 \quad \Leftrightarrow \quad x < \dfrac{-1}{-5} \quad \Leftrightarrow \quad x < \dfrac{1}{5}$
>
> Donc $S = \left]-\infty; \dfrac{1}{5}\right[$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3x} \leq e^{-2}$

> Soit x un réel.
>
> $e^{x^2-3x} \leq e^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-3x \leq -2$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$)
>
> $\Leftrightarrow \quad x^2-3x+2 \leq 0$
>
> Le discriminant du trinôme x^2-3x+2 est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1$
>
> L'équation $x^2-3x+2 = 0$ admet donc deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$
>
> Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré nous permet alors de donner le signe du trinôme x^2-3x+2 :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

> Donc $S = [1;2]$

V Fonctions de la forme e^u

Propriétés (admises)

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.

On considère la composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle : $x \mapsto u(x) \mapsto e^{u(x)}$.

On note e^u cette composée.

Par conséquent :

- l'ensemble de définition de la fonction e^u est le même que celui de u
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors e^u est dérivable sur I et $\left(e^u\right)' = u' \times e^u$
- La fonction e^u a le même sens de variation que la fonction u

Remarque : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ alors sa dérivée est $f'(x) = ae^{ax+b}$

Exemples : Dériver les fonctions f, g, h et k sur les intervalles indiqués.

- $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

  On remarque que $f = e^u$ avec u dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u(x) = -x$ et $u'(x) = -1$

  Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (-1) \times e^{-x} = -e^{-x}$

- $g(x) = e^{3x+4}$ sur $\mathbb{R}$

  On remarque que $g = e^u$ avec u dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u(x) = 3x+4$ et $u'(x) = 3$

  Donc la fonction$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3 \times e^{3x+4} = 3e^{3x+4}$

- $h(x) = e^{1-x^2}$ sur $\mathbb{R}$

  On remarque que $h = e^u$ avec u dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u(x) = 1-x^2$ et $u'(x) = -2x$

  Donc la fonction$h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -2x \times e^{1-x^2} = -2xe^{1-x^2}$

- $k(x) = e^{-4x+\frac{2}{x}}$ sur $]0;+\infty[$

  On remarque que $k = e^u$ avec u dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u(x) = -4x + \dfrac{2}{x}$ et $u'(x) = -4 + \dfrac{-2}{x^2}$

  Donc la fonction$k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = \left(-4 + \dfrac{-2}{x^2}\right) e^{-4x+\frac{2}{x}}$