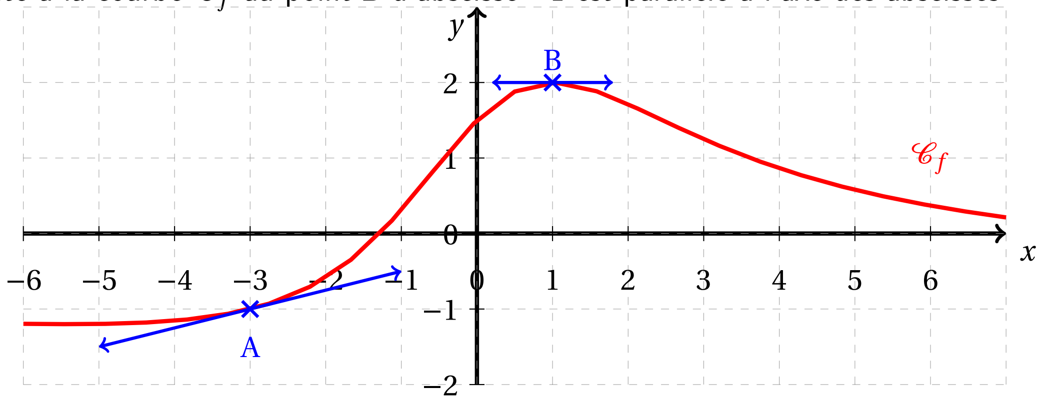
Auto-évaluation

Exercice 1.

On a représenté ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie les propriétés suivantes :

- la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $(-3;-1)$ passe par le point de coordonnées $(-1,-0.5)$
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses



1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer graphiquement $f'(1)$ et $f'(-3)$.
2. La proposition $f'(-2) \leqslant f'(3)$ est-elle vraie ?

Exercice 2.

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \dfrac{(e^{-1})^4}{e}$
- $B = \dfrac{e^2 \times e^3}{e^{-3}}$

Exercice 3.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes :

- $C = e^{3x+1} \times e^{-x+2}$
- $D = e^x(e^{-x} + 2e^x)$
- $E = \dfrac{e^{3x-5}}{e^{1-x}}$
- $F = (e^x \times e^{-x})^2$

Exercice 4.

Etudier le signe des expressions suivantes :

- $e^x + 3$
- $2e^x - 2$
- $(3x-1)e^x$

Exercice 5.

Montrer que pour tout réel x , $2e^{2x} - 3e^x + 1 = (e^x - 1)(2e^x - 1)$

Exercice 6.

Calculer la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$.

- $g(x) = (e^x + 1)(e^x - 5)$
- $h(x) = \dfrac{e^x + 5}{x}$

Problèmes

Exercice 7.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ du plan.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x^2 + 14x + 11 > 0$.

   En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Justifier que 1 est solution de $x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = 0$.

   Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = (x-1)\left(x^2 + 8x + 19\right)$.
5. Étudier le signe de la fonction f et en dresser le tableau de signes sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.

Un capteur solaire récupère de la chaleur par le biais d'un fluide. On s'inétéresse à l'évolution de la température du fluide dans un capeteur de 1m de longueur.

Cette température est modélisée par : $\mathrm{T}(x) = 170 - 150e^{-0,6x}$, où $x \in [0;1]$ est la distance, en mètres, parcourue par le fluide depuis son entré dans le capteur, et $\mathrm{T}(x)$ est la température en řC .

1. Déterminer la température à l'entrée du capteur.
2. (a) Etudier les variations de la température T sur $[0;1]$.

   (b) En déduire la température maximale, au degré près, atteinte par le fluide.

Exercice 9.

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x$.

   (a) Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).

   (b) En déduire le signe de $g(x)$.
2. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(x)$.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   (b) Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.