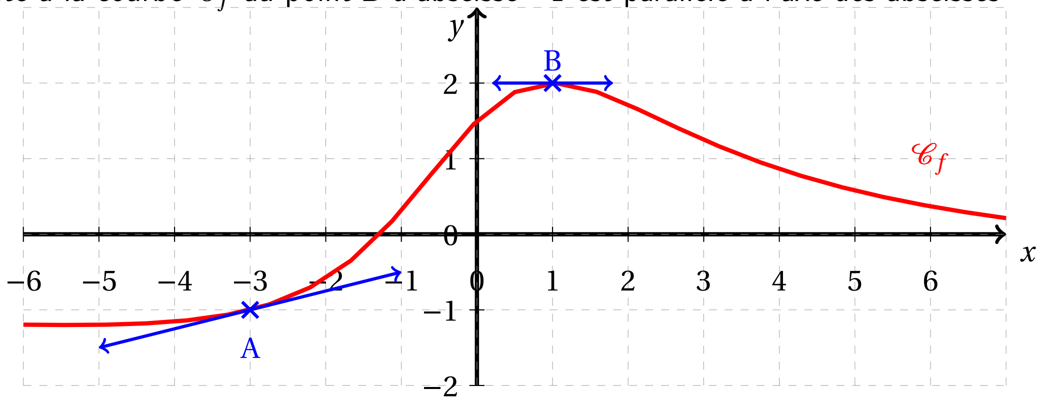
Auto-évaluation

Exercice 1.

On a représenté ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie les propriétés suivantes :

- la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $(-3;-1)$ passe par le point de coordonnées $(-1,-0.5)$
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses



1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer graphiquement $f'(1)$ et $f'(-3)$.
2. La proposition $f'(-2) \leqslant f'(3)$ est-elle vraie ?

Correction

1. On sait que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses donc $\boxed{f'(1) = 0}$

   Le nombre dérivé $f'3)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A de coordonnées $(-3;-1)$

   or cette tangente passe également par le point de coordonnées $(-1,-0.5)$

   d'où $f'(3) = \dfrac{-1-(-0,5)}{-3-(-1)} = \dfrac{-0.5}{-2} = \dfrac{1}{4}$

   Donc $\boxed{f'(-3) = \dfrac{1}{4}}$
2. Sur l'intervalle $]-\infty;1]$, la fonction f est croissante donc $f'(-2) \geqslant 0$

   Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, la fonction f est décroissante donc $f'(3) \leqslant 0$

   Donc $f'(2) \geqslant f'(3)$

   D'où $\boxed{\text{la proposition est fausse}}$

Exercice 2.

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \dfrac{(e^{-1})^4}{e}$
- $B = \dfrac{e^2 \times e^3}{e^{-3}}$

Correction

- $A = \dfrac{(e^{-1})^4}{e} = e^{-1\times 4} \times e^{-1} = e^{-4-1} = e^{-5}$
- $B = \dfrac{e^2 \times e^3}{e^{-3}} = e^{2+3} \times e^{-(-3)} = e^5 \times e^3 = e^{5+3} = e^8$

Exercice 3.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes :

- $C = e^{3x+1} \times e^{-x+2}$
- $D = e^x(e^{-x} + 2e^x)$
- $E = \dfrac{e^{3x-5}}{e^{1-x}}$
- $F = (e^x \times e^{-x})^2$

Correction

- $C = e^{3x+1} \times e^{-x+2} = e^{(3x+1)+(-x+2)} = e^{3x+1-x+2} = e^{2x+3}$
- $D = e^x(e^{-x} + 2e^x) = e^x \times e^{-x} + e^x \times 2e^x = e^{x-x} + 2e^{x+x} = e^0 + 2e^{2x} = e^0 + 2e^{2x} = 1 + 2e^{2x}$
- $E = \dfrac{e^{3x-5}}{e^{1-x}} = e^{(3x-5)-(1-x)} = e^{3x-5-1+x} = e^{4x-6}$
- $F = (e^x \times e^{-x})^2 = \left(e^{x-x}\right)^{-2} = \left(e^0\right)^{-2} = 1^{-2} = 1$

Exercice 4.

Etudier le signe des expressions suivantes :

- $e^x + 3$
- $2e^x - 2$
- $(3x-1)e^x$

Correction

- Signe de $e^x + 3$

  Pour tout x, on a $e^x > 0$ alors $e^x + 3 > 3$ donc $e^x + 3 > 0$

- Signe de $2e^x - 2$

  On a $2e^x - 2 = 2\left(e^x - 1\right)$

  Comme $2 > 0$ alors $2e^x - 2$ est du signe de $e^x - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$2e^x - 2$		$-$	0	$+$	

- Signe de $(3x-1)e^x$

  Pour tout x, on a $e^x > 0$ alors $(3x-1)e^x$ est du signe de $3x - 1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x - 1$		$-$	0	$+$	
$(3x-1)\,e^x$		$-$	0	$+$	

Exercice 5.

Montrer que pour tout réel x , $2e^{2x} - 3e^x + 1 = (e^x - 1)(2e^x - 1)$

Correction

$$\begin{aligned}(e^x - 1)\left(2e^x - 1\right) &= 2 \times e^x \times e^x - e^x - 2e^x + 1 \\ &= 2e^{2x} - 3e^x + 1\end{aligned}$$

On obtient ce qu'il fallait démontrer !

Exercice 6.

Calculer la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$.

- $g(x) = (e^x + 1)(e^x - 5)$
- $h(x) = \dfrac{e^x + 5}{x}$

Correction

- On a $g(x) = \left(e^x + 1\right)\left(e^x - 5\right)$

  On a $g(x) = \left(e^x + 1\right)\left(e^x - 5\right)$

  Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

  On a $g = u \times v$ avec $u(x) = e^x + 1$ et $u'(x) = e^x$

  $v(x) = e^x - 5$ et $v'(x) = e^x$

  Alors $g' = u'v + v'u$

  D'où $g'(x) = e^x \times \left(e^x - 5\right) + \left(e^x + 1\right) \times e^x$

  $g'(x) = e^x \times (e^x - 5 + e^x + 1)$

  Donc $\boxed{g'(x) = e^x(2e^x - 4)}$

- On a $h(x) = \dfrac{e^x + 5}{x}$

  On a $h(x) = \dfrac{e^x + 5}{x}$

  Alors h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$

  On a $h = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x + 5$ et $u'(x) = e^x$

  $v(x) = x$ et $v'(x) = 1$

  Alors $h' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

  D'où $h'(x) = \dfrac{e^x \times x - 1 \times (e^x + 5)}{x^2}$

  Donc $\boxed{h'(x) = \dfrac{xe^x - e^x - 5}{x^2}}$

Problèmes

Exercice 7.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x^2 + 14x + 11 > 0$.

   En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Justifier que 1 est solution de $x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = 0$.

   Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = (x-1)\left(x^2 + 8x + 19\right)$.
5. Étudier le signe de la fonction f et en dresser le tableau de signes sur $\mathbb{R}$.

Correction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   $f'(x) = 3x^2 + 7 \times 2x + 11 \times 1 = 3x^2 + 14x + 11$.
2. On résout dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x^2 + 14x + 11 > 0$.

   On cherche d'abord si le polynôme admet des racines dans $\mathbb{R}$.

   $\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \times 3 \times 11 = 196 - 132 = 64 = 8^2$

   Le discriminant est positif donc le polynôme admet deux racines réelles :
   $x' = \dfrac{-b-\sqrt{\delta}}{2a} = \dfrac{-14-8}{6} = \dfrac{-22}{6} = \dfrac{-11}{3}$ et $x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\delta}}{2a} = \dfrac{-14+8}{6} = \dfrac{-6}{6} = -1$.
   On en déduit le signe du polynôme $3x^2+14x+11$ qui est du signe de $a = 3$ donc positif, à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		$-\dfrac{11}{3}$		-1		$+\infty$
$3x^2+14x+11$		+	0	−	0	+	

   L'ensemble solution de l'inéquation $3x^2 + 14x + 11 > 0$ est donc $S = \left]-\infty ; -\dfrac{11}{3}\right[\cup \left]-1 ; +\infty\right[$.

   On cherche les extrémums : $f\left(-\dfrac{11}{3}\right) = -\dfrac{392}{27} \approx -14,52$ et $f(-1) = -24$.

   On établit le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		$-\frac{11}{3}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f		$\nearrow$	≈ -14.52	$\searrow$	-24	$\nearrow$	

3. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)(x-0)$.

   $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$ donc $f(0) = -19$; $f'(x) = 3x^2 + 14x + 11$ donc $f'(0) = 11$.

   La tangente a pour équation : $y = -19 + 11(x-0)$ c'est-à-dire $y = 11x - 19$.

4. Soit l'équation $x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = 0$.

   $1^3 + 7 \times 1^2 + 11 \times 1 - 19 = 19 - 19 = 0$ donc 1 est solution de l'équation $x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = 0$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)(x^2+8x+19) = x^3 + 8x^2 + 19x - x^2 - 8x - 19 = x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = f(x)$.

5. Étudier le signe de la fonction f revient à étudier le signe de $f(x) = (x-1)(x^2+8x+19)$, donc le signe de chacun des facteurs.

   - $x - 1 > 0 \iff x > 1$
   - Pour étudier le signe de $x^2 + 8x + 19$, on cherche si ce polynôme a des racines.

     $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 19 = -12 < 0$ donc le polynôme n'a pas de racine, il garde donc un signe constant, celui du coefficient de x^2 ; il est donc toujours positif.

   On établit le tableau de signes de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x^2+8x+19$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Exercice 8.

Un capteur solaire récupère de la chaleur par le biais d'un fluide. On s'inétéresse à l'évolution de la température du fluide dans un capeteur de 1m de longueur.
Cette température est modélisée par : $T(x) = 170 - 150e^{-0,6x}$, où $x \in [0;1]$ est la distance, en mètres, parcourue par le fluide depuis son entré dans le capteur, et $T(x)$ est la température en řC .

1. Déterminer la température à l'entrée du capteur.
2. (a) Etudier les variations de la température T sur $[0;1]$.
   (b) En déduire la température maximale, au degré près, atteinte par le fluide.

<u>Correction</u>

1. on a $T(0) = 170 - 150e^{-0,6\times 0} = 170 - 150 = 20$
   Donc $\boxed{\text{la température à l'entrée du capteur est } T(0) \text{ soit } 20\text{řC}}$
2. (a) Etudions les variations de la température T sur $[0;1]$.
   On sait que $T(x) = 170 - 150e^{-0,6x}$
   Comme la fonction T est dérivable sur $\mathbb{R}$
   Alors $T'(x) = -150 \times (-0,6)e^{-0,6x}$
   Donc $\boxed{T'(x) = 90e^{-0,6x}}$
   (b) En déduire la température maximale, au degré près, atteinte par le fluide.
   Comme $T'(x) = 90e^{-0,6x}$
   Or $90 > 0$ et pour tout réel x $e^{-0,6x} > 0$
   Donc $T'(x) > 0$
   Donc la fonction T est strictement croissante sur $[0;1]$
   comme $T(1) = 170 - 150e^{-0,6\times 1} = 170 - 150e^{-0,6} \approx 87,68$
   Donc $\boxed{\text{la température maximale du capteur est d'environ } 87,68\text{řC}}$

Exercice 9.

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x$.
   (a) Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
   (b) En déduire le signe de $g(x)$.
2. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(x)$.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

<u>Correction - Sujet : Antilles-Guyane 19 juin 2014</u>

1. On a g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x$.
   g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont,
   et pour tout réel x : $g'(x) = -1 + e^x$.
   On a alors $g'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
   Le tableau de variations de g est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de g		↘	2	↗	

   On déduit du tableau précédent que, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ g(x) \geqslant 2 > 0.}$

2. On a la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont,

Pour tout réel x, on a $f = u + v \times w$ d'où $f = u' + (v'w + w'v)$

avec $u(x) = x + 1$ $u'(x) = 1$

$v(x) = x$ $v'(x) = 1$

$w(x) = e^{-x}$ $w'(x) = -e^{-x}$

D'où
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + (1 \times e^{-x} + (-e^{-x}) \times x) \\ &= 1 + e^{-x}(1-x) \\ &= e^{-x}(e^{x} + (1-x)) \\ &= e^{-x}(1 - x + e^{x}) \\ &= e^{-x}g(x). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{pour tout nombre réel } x : f'(x) = e^{-x}g(x).}$

3. On a démontré que pour tout nombre réel x : $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

   On a vu plus haut que, pour tout réel x, $g(x) > 0$,

   et comme par ailleurs $e^{-x} > 0$

   Donc on en déduit que $f'(x) > 0$.

   On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
Variation de f	$\nearrow$

4. (a) L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $\mathrm{T}_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

   Puisque $f'(x) = e^{-x}g(x)$, on obtient $f'(0) = 2$

   Puisque $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$, on obtient $f(0) = 1$

   Alors $\mathrm{T}_0 : y = 2(x-0) + 1$

   Donc $\boxed{\mathrm{T}_0 : y = 2x + 1}$

   (b) On pose pour tout réel x, $k(x) = f(x) - (2x+1)$,

Alors
$$\begin{aligned} k(x) &= x+1+\frac{x}{e^x}-(2x+1) \\ &= \frac{x}{e^x}-x \\ &= \frac{x}{e^x}\left(1-e^x\right) \end{aligned}$$

Dressons alors un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$1-e^x$		$+$	0	$-$	
$k(x)$		$-$	0	$-$	

On en déduit que $\boxed{\mathscr{C} \text{ est située en dessous de T.}}$