Exercice 1.

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}$.

Partie A

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$.
   (a) Étudier la limite de $g(x)$ quand x tend vers 1.
   (b) Calculer $g'(x)$ pour $x\in]1\ ;\ +\infty[$.
   (c) Résoudre dans l'intervalle $x\in[1\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $1-\ln(x-1)>0$.
   (d) Étudier le sens de variation de g sur $]1\ ;\ +\infty[$.
   (e) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique, notée α, dans l'intervalle $[e+1\ ;\ e^3+1]$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]1\ ;\ +\infty[$.
2. φ est la fonction définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $\varphi(x)=\dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$.
   (a) Étudier la limite de φ en 1 et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.
   (b) Clculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g\left(x^2\right)$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   (c) Montrer que φ est croissante sur $\left]1\ ;\ \sqrt{\alpha}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt{\alpha}\ ;\ +\infty\right[$

Partie B

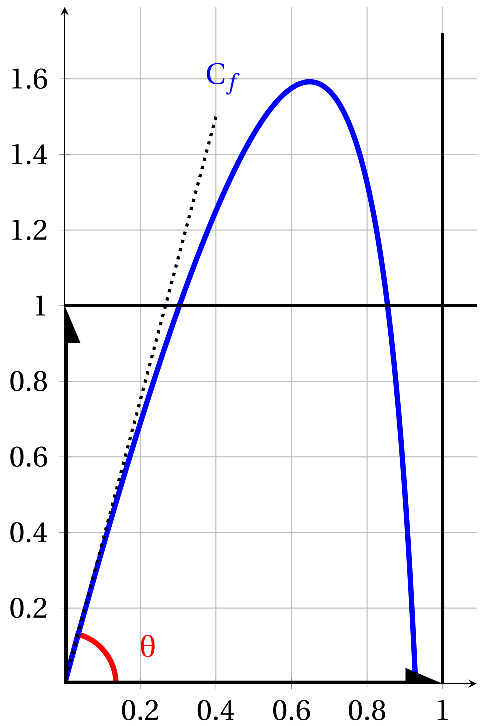
1. Vérifier que pour tout $x\in]0\ ;\ +\infty[$, $f(x)=\varphi\left(e^x\right)$.
2. En déduire :
   (a) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
   (b) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)$.
3. Montrer que, pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f(x)\leqslant\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

Exercice 2.

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas $1{,}6$ mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ par : $f(x) = bx + 2\ln(1-x)$ où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1[$. On note f' sa fonction dérivée.

   On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ et que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1[$: $f'(x) = \dfrac{-bx+b-2}{1-x}$.

   Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas $1{,}6$ mètre.

3. Dans cette question, on choisit $b = 5{,}69$.

   L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.

   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

Exercice 3.

On considère trois points du plan A, B et C dont les affixes sont $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 + 5i$ et enfin $z_C = 2(1 + \sqrt{3}) + i(3 - \sqrt{3})$.

1. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que le triangle ABC est isocèle en A.
3. A l'aide d'un quotient de complexes, démontrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure $-\dfrac{\pi}{3}$.
4. En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 4.

On considère dans le plan complexe l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M_t de coordonnées $\begin{cases} x_{M_t} & = -1 + 2\cos(t) \\ y_{M_t} & = 2 + 2\sin(t) \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$, et C, le point d'affixe $z_C = -1 + 2i$.

1. Soient $t \in \mathbb{R}$ et z_t l'affixe de M_t. Calculer $|z_t - z_C|$. En déduire que M_t se trouve sur un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit M un point de $\mathscr{C}$ et z son affixe. On pose : $z' = z - z_C$.
   (a) Déterminer $|z'|$.
   (b) En déduire la forme trigonométrique de z', puis les coordonnées de M.
   (c) En déduire que $M \in \mathscr{E}$.
3. Conclure sur la nature de $\mathscr{E}$.

Exercice 5.

On appelle *entier de GauSS* tout nombre complexe de la forme $k + i\ell$, où k et ℓ sont des entiers relatifs.

1. Montrer que la somme et la différence de deux entiers de GauSS sont des entiers de GauSS.
2. Montrer que le produit de deux entiers de GauSS est un entier de GauSS.
3. Déterminer l'écriture algébrique de l'inverse de 2i. L'inverse d'un entier de GauSS est-il nécéssairement un entier de GauSS ?

Exercice 6.

On se propose dans cet exercice de calculer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

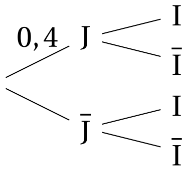
1. Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$: $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \dfrac{1 - z^5}{1 - z}$.
2. En utilisant la valeur $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ dans la formule précédente, démontrer que : $\left(z_0^2 + \dfrac{1}{z_0^2}\right) + \left(z_0 + \dfrac{1}{z_0}\right) + 1 = 0$.
3. Démontrer que : $\left(z_0^2 + \dfrac{1}{z_0^2}\right) = \left(z_0 + \dfrac{1}{z_0}\right)^2 - 2$. et que : $\left(z_0 + \dfrac{1}{z_0}\right) = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
4. En déduire, en utilisant la relation trouvée à la question 2., que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est solution d'une équation du second degré que l'on précisera, puis calculer la valeur exacte cherchée.

Exercice 7.

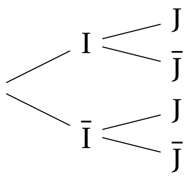
Une société effectue auprès de 10 000 personnes une étude de marché concernant un nouveau produit. Dans cet échantillon, 40 % sont des jeunes (moins de 20 ans) et 20 % de ceux-ci se déclarent intéressés par le produit. En revanche, 10 % seulement des personnes de plus de 20 ans se déclarent intéressés par ce produit.
On choisit au hasard une personne dans l'échantillon.
On note :

- J l'événement « La personne est jeune. »
- I l'événement « La personne est intéressée ».

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



2. (a) Calculer $p(I \cap J)$, $p(I \cap \bar{J})$, $p(\bar{I} \cap J)$ et $p(\bar{I} \cap \bar{J})$.
   (b) Calculer $p(I)$.
3. (a) Calculer la probabilité que la personne ait moins de 20 ans sachant qu'elle est intéressée par le produit.
   (b) Reproduire l'arbre de probabilités ci-dessous.



Exercice 8.

Une usine fabrique des microprocesseurs pouvant présenter deux défauts A et B. Elle a réalisé une étude statistique donnant les résultats suivants :

- 9 % des microprocesseurs présentent le défaut A.
- 6 % des microprocesseurs présentent le défaut B.
- 3 % des microprocesseurs présentent les deux défauts.

1. Les événements A : « Le microprocesseur présente le défaut A » et B : « Le ,microprocesseur présente le défaut B » sont-ils indépendants ?
2. Quelle est la probabilité que le microprocesseur ne présente que le défaut A ?
3. Quelle est la probabilité que le microprocesseur ne présente aucun défaut ?