Exercice 1.

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle 0 ; $+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}$.

Partie A

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 2x-(x-1)\ln(x-1)$.
   (a) Étudier la limite de $g(x)$ quand x tend vers 1.
   (b) Calculer $g'(x)$ pour $x\in]1\ ;\ +\infty[$.
   (c) Résoudre dans l'intervalle $x\in[1\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $1-\ln(x-1)>0$.
   (d) Étudier le sens de variation de g sur $]1\ ;\ +\infty[$.
   (e) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique, notée α, dans l'intervalle $[e+1\ ;\ e^3+1]$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]1\ ;\ +\infty[$.
2. φ est la fonction définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$.
   (a) Étudier la limite de φ en 1 et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.
   (b) Clculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g\left(x^2\right)$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   (c) Montrer que φ est croissante sur $\left]1\ ;\ \sqrt{\alpha}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt{\alpha}\ ;\ +\infty\right[$

Partie B

1. Vérifier que pour tout $x\in]0\ ;\ +\infty[$, $f(x)=\varphi\left(e^x\right)$.
2. En déduire :
   (a) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
   (b) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)$.
3. Montrer que, pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f(x)\leqslant\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

Correction

D'après Bac Centres Étrangers juin 2000

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}$.

Partie A

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$.

   (a) Limite en 1 : $\lim\limits_{x\to 1} 2x = \boxed{1}$

   Limite en $+\infty$(non demandée)

   On a une forme indéterminée.

   $\forall x,\ f(x)=x\left[1-\dfrac{x-1}{x}\times\ln(x-1)\right]$.

   $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x}=1-\dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}=1\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-\dfrac{x-1}{x}\ln(x-1)\right]=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-1)=+\infty$.

   Par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

   (b) Calculer $g'(x)$ pour $x\in]1\ ;\ +\infty[$.

   (c) $1-\ln(x-1)>0 \Leftrightarrow \ln(x-1)<1 \Leftrightarrow x-1<e^1=e \Leftrightarrow x<1+e \Leftrightarrow 1-\ln(x-1)=0 \Leftrightarrow \ln(x-1)=1$
   $\Leftrightarrow x-1=e^1=e \Leftrightarrow x<1+e$.

   (d) On en déduit que g est croissante sur $[1\ ;\ +e+1]$ puis décroissante sur $[e+1\ ;\ +\infty[$

x	1		$e+1$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	$e+2$	$\searrow$	$-\infty$

   (e) Il est clair que $g(x)\neq 0$ sur $]1\ ;\ e+1]$.

      i. g est continue (somme, produit et composée de fonctions continues)

      ii. $g(e+1)=e+2>0$

      iii. $g\left(e^3+1\right)\approx -18<0$

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires , l'équation $g(x)=0$ admet une solution danas l'intervalle $\left[e+1\ ;\ e^3+1\right]$; celle-ci est unique car g est monotone sur cet intervalle. On note α cette solution.

   Signe de g :

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Correction

2. φ est la fonction définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$.

   (a) i. **Limite en 1** : $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 1}\ln\left(x^2-1\right) = -\infty$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x) = -\infty}$.

   ii. **Limite en $+\infty$** :

   On a une forme indéterminée ; on esssaye de faire apparaître une formule de croissances comparées donc de faire apparaître la fraction $\dfrac{\ln x}{x}$.

   $x^2-1 = x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc $\ln\left(x^2-1\right) = \ln\left(x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = \ln\left(x^2\right)+\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2\ln x + \ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

   Alors : $\boxed{\varphi(x) = 2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\times\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}$.

   D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$.

   $\lim\limits_{x\to=\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to=\infty}\left(\dfrac{1}{x}\times\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = 0$.

   On en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0}$.

   (b) φ est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ comme quotient et composée de fonctions dérivables.

   $\varphi = \dfrac{\ln(u)}{v}$ avec $u(x) = x^2-1$ et $v(x) = 1$.

   $\varphi' = \left(\dfrac{\ln(u)}{v}\right)' = \dfrac{(\ln(u))'v-\ln(u)v'}{v^2} = \dfrac{\frac{u'}{u}v-\ln(u)v'}{v^2}$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$.

   $\varphi'(x) = \dfrac{\frac{2x}{x^2-1}\times x-1\times\ln\left(x^2-1\right)}{x^2} = \boxed{\dfrac{2x^2-\left(x^2-1\right)\ln\left(x^2-1\right)}{x^2\left(x^2-1\right)}}$.

   $\forall x>1,\ x^2>0$ et $x^2-1>0$ donc $\varphi'(x)$ est du signe du numérateur.

   On constate que ce dénominateur, $2x^2-\left(x^2-1\right)\ln\left(x^2-1\right) = g\left(x^2\right)$.

   (c) D'après le signe de g, on a $\varphi'(x)\geqslant 0$ pour $1\leqslant x^2\leqslant\alpha$ donc $1\leqslant x\leqslant\sqrt{\alpha}$ et $\varphi'(x)\leqslant 0$ pour $\alpha\leqslant x^2$, c'est-à -dire $\sqrt{\alpha}\leqslant x$.

   Par conséquent : φ est croissante sur $]1\ ;\ \sqrt{\alpha}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\alpha}\ ;\ +\infty[$

Correction

Partie B

1. Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty$, $f(x) = \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^x\right)^2-1}{x} = \varphi\left(\mathrm{e}^x\right)$.

2. En déduire :

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varphi\left(\mathrm{e}^x\right) = \lim\limits_{X\to 1} \varphi(X) = \boxed{-\infty}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \varphi\left(\mathrm{e}^x\right) = \lim\limits_{X\to +\infty} \varphi(X) = \boxed{0}$.

   (c) $f = \varphi \circ w$ avec $w(x) = \mathrm{e}^x$ donc $f' = w' \times \varphi' \circ w$ d'où

   $f'(x) = \mathrm{e}^x \times \varphi'(\mathrm{e}^x)$.

   $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$ pour $1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow 0 < x \leqslant \ln\sqrt{\alpha}$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant \ln\sqrt{\alpha}$.

3. Le maximum de f est $f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\ln\alpha\right) = \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\ln\alpha}\right)-1}{\mathrm{e}^{\ln\sqrt{\alpha}}} = \dfrac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$.

   Or, par définition de α, on a $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = (\alpha-1)\ln(\alpha-1) \Leftrightarrow \ln(\alpha-1) = \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$.

   On en déduit que $f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right) = \dfrac{2\alpha}{(\alpha-1)\sqrt{\alpha}} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}}$.

   Tableau de variation de f :

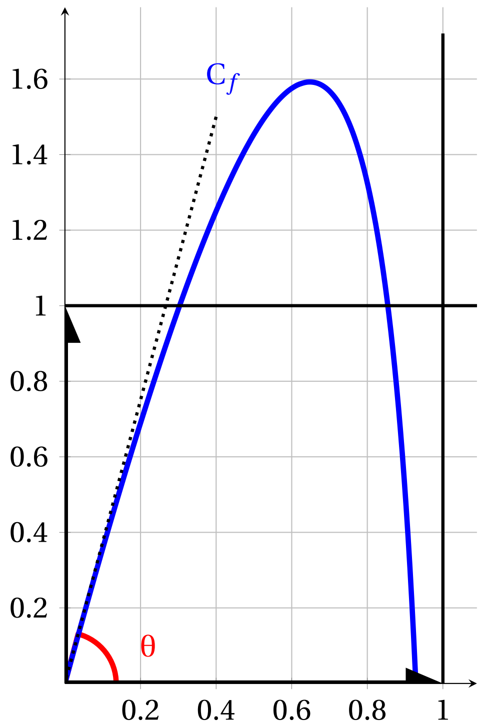
x	0		$\ln\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$	$\searrow$	0

Exercice 2.

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ par : $f(x) = bx + 2\ln(1-x)$ où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1[$. On note f' sa fonction dérivée.

   On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ et que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1[$: $f'(x) = \dfrac{-bx+b-2}{1-x}$.

   Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.

3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.

   L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.

   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

Correction

Amérique du Nord 29 mai 2018

1. Puisque la fonction f est dérivable, et que l'on connaît sa fonction dérivée, on va étudier le signe de la fonction dérivée pour connaître les variations de la fonction f.

   Soit x dans $[0\ ;\ 1[$. On a $x<1$ et donc, $0<1-x$.

   Le dénominateur de $f'(x)$ étant strictement positif, le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur, qui est une quantité affine, de coefficient directeur $-b$ négatif (puisque b est supérieur à 2) et donc on aura bien une fonction dérivée d'abord positive, pour $x \leqslant \dfrac{b-2}{b}$, puis négative.

   On remarque le nombre $\dfrac{b-2}{b}=1-\dfrac{2}{b}$ est un nombre inférieur à 1 et positif, car b est un réel positif, supérieur à 2.

   On peut donc affirmer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{b-2}{b}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{b-2}{b}\ ;\ 1\right[$.

   Ces variations indiquent que f atteint un maximum pour $x=\dfrac{b-2}{b}=1-\dfrac{2}{b}$.

   Ce maximum est donc $f\left(1-\dfrac{2}{b}\right)=b\times\left(1-\dfrac{2}{b}\right)+2\ln\left(1-\left(1-\dfrac{2}{b}\right)\right)=b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.

   Le maximum de la fonction f s'établit bien à $b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.

2. Si on essaye de résoudre l'inéquation $b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)\leqslant 1,6$, on se retrouve devant une équation que l'on ne sait pas résoudre de façon exacte.

   On peut donc procéder à tâtons, par exploration à la calculatrice pour donner une réponse.

   La méthode la plus complète serait la suivante :

   Posons m la fonction définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par $m(b)=b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)=b-2+\ln(4)-2\ln(b)$.

   La fonction m est dérivable sur son ensemble de définition et on a pour tout b supérieur à 2 : $m'(b)=1-\dfrac{2}{b}$.

   Comme b est supérieur à 2, on en déduit que $m'(b)$ est positif, et même strictement positif pour $b>2$, et donc que la fonction m est strictement croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.

   $m(2)=2-2+\ln 1=0$.

   S'il y a un réel b_0 tel que $f(b_0)=1,6$, on pourra donc dire que $2\leqslant b\leqslant b_0 \iff 0\leqslant m(b)\leqslant 1,6$.

   Par exploration à la calculatrice, on constate (par exemple) que $m(10)\approx 4,8$.

Correction

La fonction m étant continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $[2 ; 10]$ et 1,6 étant une valeur intermédiaire entre $m(0) = 0$ et $m(10) \approx 4,8$, le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe un unique nombre b_0 antécédent de 1,6 par m sur $[2 ; 10]$. Comme m est strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$, il n'y aura pas d'autre antécédent que celui là .

Un balayage à la calculatrice donne $5,69 < b_0 < 5,70$.

Les valeurs du paramètre b garantissant une hauteur maximale $m(b)$ ne dépassant pas 1,6 mètre sont donc les réels de l'intervalle $[2 ; b_0]$, soit, en donnant une valeur approchée (nécessairement par défaut, vu que m est croissante) de l'intervalle $[2 ; 5,69]$.

3) Si on choisit $b = 5,69$, alors, cela signifie que la tangente tracée en pointillés est la droite d'équation : $y = f'(0) \times (x-0) + f(0) = \dfrac{b-2}{1-0} \times x + 0 = (5,69-2)x = 3,69x$.

Cela signifie que l'origine du repère, le point de coordonnée $(1 ; 0)$ et le point de coordonnées $(1 ; 3,69)$ forment un triangle rectangle, dans lequel le côté opposé à l'angle θ mesure 3,69 et le côté adjacent mesure 1, donc la tangente de l'angle est donnée par $\tan\theta = \dfrac{3,69}{1} = 3,69$.

À la calculatrice (réglée en mode degrés), on obtient $\theta = \arctan(3,69) \approx 74,8$ř

Exercice 3.

On considère trois points du plan A, B et C dont les affixes sont $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 + 5i$ et enfin $z_C = 2(1 + \sqrt{3}) + i(3 - \sqrt{3})$.

1. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que le triangle ABC est isocèle en A.
3. A l'aide d'un quotient de complexes, démontrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure $-\dfrac{\pi}{3}$.
4. En déduire la nature du triangle ABC.

Correction

On considère trois points du plan A, B et C dont les affixes sont $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 + 5i$ et enfin $z_C = 2(1 + \sqrt{3}) + i(3 - \sqrt{3})$.

1. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = \boxed{2 + 4i}$; $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = \boxed{1 + 2\sqrt{3} + i\left(2 - \sqrt{3}\right)}$.
2. $AB = \left|z_{\overrightarrow{AB}}\right| = |2 + 4i| = 2\,|1 + 2i| = \boxed{2\sqrt{5}}$.

   $AC = \left|z_{\overrightarrow{AC}}\right| = \left|1 + 2\sqrt{3} + i\left(2 - \sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{\left(1 + 2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 4\sqrt{3} + 12 + 4 - 4\sqrt{3} + 3} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

   $AB = AC$ donc ABC est isocèle en A.
3. $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{1 + 2\sqrt{3} + i\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2 + 4i} = \dfrac{\left(1 + 2\sqrt{3} + i\left(2 - \sqrt{3}\right)\right)(2 - 4i)}{2^2 + 4^2} = \dfrac{2 + 4\sqrt{3} + 8 - 4\sqrt{3} + i\left(-4 - 8\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3}\right)}{20}$

   $= \dfrac{10 - 10i\sqrt{3}}{20} = \boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$.

   $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{\dfrac{\pi}{3}}$.
4. ABC est un triangle isocèle en A avec un angle en A égal à $\dfrac{\pi}{3}$ donc ABC est **équilatéral**

   Remarque : $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AB}{AC} = \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$ donc $AB = AC$ et on retrouve que ABC est isocèle.

Exercice 4.

On considère dans le plan complexe l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M_t de coordonnées $\begin{cases} x_{\mathrm{M}_t} & = -1+2\cos(t) \\ y_{\mathrm{M}_t} & = 2+2\sin(t) \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$, et C, le point d'affixe $z_\mathrm{C} = -1+2\mathrm{i}$.

1. Soient $t \in \mathbb{R}$ et z_t l'affixe de M_t. Calculer $|z_t - z_\mathrm{C}|$. En déduire que M_t se trouve sur un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit M un point de $\mathscr{C}$ et z son affixe. On pose : $z' = z - z_\mathrm{C}$.
   (a) Déterminer $|z'|$.
   (b) En déduire la forme trigonométrique de z', puis les coordonnées de M.
   (c) En déduire que $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$.
3. Conclure sur la nature de $\mathscr{E}$.

Correction

On considère dans le plan complexe l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M_t de coordonnées $\begin{cases} x_{\mathrm{M}_t} & = -1+2\cos(t) \\ y_{\mathrm{M}_t} & = 2+2\sin(t) \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$, et C, le point d'affixe $z_\mathrm{C} = -1+2\mathrm{i}$.

1. Soient $t \in \mathbb{R}$ et z_t l'affixe de M_t. $|z_t - z_\mathrm{C}| = |2\cos t + 2\mathrm{i}\sin t| = 2|\cos t + \mathrm{i}\sin t| = 2\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| = 2$
   On en déduit que M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon 2.
2. Soit M un point de $\mathscr{C}$ et z son affixe. On pose :
   $z' = z - z_\mathrm{C}$.
   (a) $\left|z'\right| = 2$.
   (b) On en déduit que $z' = 2\cos t$ donc $z_\mathrm{M} = -1+2\mathrm{i}+2\cos t+2\mathrm{i}\sin t$.
   (c) On en déduit que : $\begin{cases} x_{\mathrm{M}_t} & = -1+2\cos(t) \\ y_{\mathrm{M}_t} & = 2+2\sin(t) \end{cases}$ M appartient donc à $\mathscr{E}$
3. On a montré : $\begin{cases} \mathscr{E} \subset \mathscr{C} \\ \mathscr{C} \subset \mathscr{E} \end{cases}$ donc $\mathscr{C} = \mathscr{E}$.

Exercice 5.

On appelle *entier de GauSS* tout nombre complexe de la forme $k+\mathrm{i}\ell$, où k et ℓ sont des entiers relatifs.

1. Montrer que la somme et la différence de deux entiers de GauSS sont des entiers de GauSS.
2. Montrer que le produit de deux entiers de GauSS est un entier de GauSS.
3. Déterminer l'écriture algébrique de l'inverse de 2i. L'inverse d'un entier de GauSS est-il nécéssairement un entier de GauSS ?

Correction

On appelle *entier de GauSS* tout nombre complexe de la forme $k+\mathrm{i}\ell$, où k et ℓ sont des entiers relatifs.

On pose $z=k+\mathrm{i}l$ et $z'=k'+\mathrm{i}l'$.

1. $z+z'=\boxed{(k+k')+\mathrm{i}(l+l')}$ avec $k+k'\in\mathbb{Z}$ et $l+l'\in\mathbb{Z}$ donc la somme de deux entiers de GauSS est un entier de GauSS.

   Idem pour la différence.
2. $\boxed{zz'=\left(kk'-ll'\right)+\mathrm{i}\left(kl'+k'l\right)}$ avec $kk'-ll'\in\mathbb{Z}$ et $kl'+k'l\in\mathbb{Z}$ donc le produit de deux entiers de GauSS est un entier de GauSS.
3. 2i est un entier de GauSS mais $\dfrac{1}{2\mathrm{i}}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ car $\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$ mais $-\dfrac{1}{2}$ n'est **pas** un entier donc l'inverse d'un entier de GauSS n'est pas forcément un entier de GauSS.

Exercice 6.

On se propose dans cet exercice de calculer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

1. Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$: $1+z+z^2+z^3+z^4 = \dfrac{1-z^5}{1-z}$.
2. En utilisant la valeur $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$ dans la formule précédente, démontrer que : $\left(z_0^2+\dfrac{1}{z_0^2}\right)+\left(z_0+\dfrac{1}{z_0}\right)+1=0$.
3. Démontrer que : $\left(z_0^2+\dfrac{1}{z_0^2}\right)=\left(z_0+\dfrac{1}{z_0}\right)^2-2$. et que : $\left(z_0+\dfrac{1}{z_0}\right)=2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
4. En déduire, en utilisant la relation trouvée à la question 2., que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est solution d'une équation du second degré que l'on précisera, puis calculer la valeur exacte cherchée.

Correction

On se propose dans cet exercice de calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1. Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $1+z+z^2+z^3+z^4 = \frac{1-z^5}{1-z}$. (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison z).

2. On pose $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$. On a : $1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4 = \boxed{\frac{1-z_0^5}{1-z_0}}$.

   Or $1-z_0^5 = 1-\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = 1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 0$.

   $1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4 = 0 \Leftrightarrow z_0^2\left(\frac{1}{z_0^2}+\frac{1}{z_0}+1+z_0+z_0^2\right)$.

   On en déduit que $z_0^2\left(\frac{1}{z_0^2}+\frac{1}{z_0}+1+z_0+z_0^2\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\left(z_0^2+\frac{1}{z_0^2}\right)+\left(z_0+\frac{1}{z_0}\right)+1=0}$ en divisant par z_0^2 non nul et en associant les nombres deux par deux.

3. $\left(z_0+\frac{1}{z_0}\right)^2-2 = z_0^2+2+\frac{1}{z_0^2}-2 = z_0^2+\frac{1}{z_0^2}$ d'où le résultat.

   $\left(z_0+\frac{1}{z_0}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} = \boxed{2\cos\frac{2\pi}{5}}$.

4. $\left(z_0^2+\frac{1}{z_0^2}\right)+\left(z_0+\frac{1}{z_0}\right)+1=0 \Leftrightarrow \left(\left(z_0+\frac{1}{z_0}\right)^2-2\right)+\left(z_0+\frac{1}{z_0}\right)+1=0 \Leftrightarrow 4\cos^2\frac{2\pi}{5}-2+2\cos\frac{2\pi}{5}+1=0$

   $\Leftrightarrow \boxed{4\cos^2\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{\pi}{5}-1=0}$.

   $\cos\frac{2\pi}{5}$ est donc une solution de l'équation $4\mathrm{X}^2+2\mathrm{X}-1=0$. $\Delta = 20 > 0$; l'équation a deux solutions :

   $\mathrm{X}_1 = \frac{-2-\sqrt{20}}{8} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$ et $\mathrm{X}_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0$.

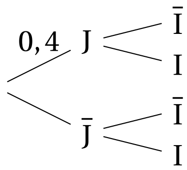
   Comme $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ car $0 \leqslant \frac{2\pi}{5} \leqslant \frac{\pi}{2}$, on en déduit $\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

Exercice 7.

Une société effectue auprès de 10 000 personnes une étude de marché concernant un nouveau produit. Dans cet échantillon, 40 % sont des jeunes (moins de 20 ans) et 20 % de ceux-ci se déclarent intéressés par le produit. En revanche, 10 % seulement des personnes de plus de 20 ans se déclarent intéressés par ce produit.
On choisit au hasard une personne dans l'échantillon.
On note :

- J l'événement « La personne est jeune. »
- I l'événement « La personne est intéressée ».

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.

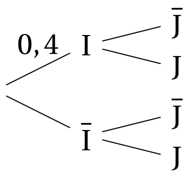


2. (a) Calculer $p(I \cap J)$, $p(I \cap \overline{J})$, $p(\overline{I} \cap J)$ et $p(\overline{I} \cap \overline{J})$.

   (b) Calculer $p(I)$.

3. (a) Calculer la probabilité que la personne ait moins de 20 ans sachant qu'elle est intéressée par le produit.

   (b) Reproduire l'arbre de probabilités ci-dessous.



Correction

Une société effectue auprès de 10 000 personnes une étude de marché concernant un nouveau produit. Dans cet échantillon, 40 % sont des jeunes (moins de 20 ans) et 20 % de ceux-ci se déclarent intéressés par le produit.

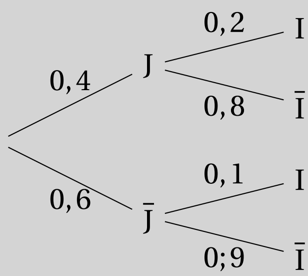
En revanche, 10 % seulement des personnes de plus de 20 ans se déclarent intéressés par ce produit.

On choisit au hasard une personne dans l'échantillon.

On note :

- J l'événement « La personne est jeune. »
- I l'événement « La personne est intéressée ».

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



2. (a) On a :

   i. $p(\mathrm{I} \cap \mathrm{J}) = p_{\mathrm{J}}(\mathrm{I}) \times p(\mathrm{J}) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$

   ii. De même : $p(\mathrm{I} \cap \overline{\mathrm{J}}) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$

   iii. $p(\overline{\mathrm{I}} \cap \mathrm{J}) = 0,8 \times 0,4 = 0,32$

   iv. $p(\overline{\mathrm{I}} \cap \overline{\mathrm{J}}) = 0,9 \times 0,6 = 0,54$

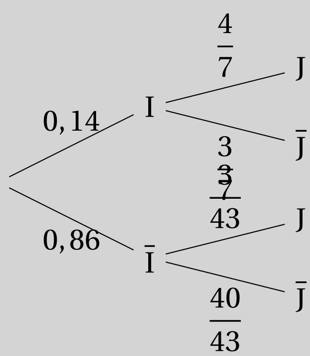
   (b) Calculons $p(\mathrm{I})$.

   $\mathrm{I} = (\mathrm{I} \cap \mathrm{J}) \cup \left(\mathrm{I} \cap \overline{\mathrm{J}}\right)$, réunion d'événements incompatibles.

   Donc : $p(\mathrm{I}) = p\,(\mathrm{I} \cap \mathrm{J}) + p\left(\mathrm{I} \cap \overline{\mathrm{J}}\right) = p_{\mathrm{J}}(\mathrm{I}) \times p(\mathrm{J}) + p_{\overline{\mathrm{J}}}(\mathrm{I}) \times p\left(\overline{\mathrm{J}}\right) = 0,08 + 0,06 = 0,14$

3. (a) $p_{\mathrm{I}}(\mathrm{J}) = \dfrac{p(\mathrm{I} \cap \mathrm{J})}{p(\mathrm{I})} = \dfrac{0,08}{0,14} = \dfrac{8}{14} = \dfrac{4}{7}$

   (b) Reproduire l'arbre de probabilités ci-dessous.



Exercice 8.

Une usine fabrique des microprocesseurs pouvant présenter deux défauts A et B. Elle a réalisé une étude statistique donnant les résultats suivants :

- 9 % des microprocesseurs présentent le défaut A.
- 6 % des microprocesseurs présentent le défaut B.
- 3 % des microprocesseurs présentent les deux défauts.

1. Les événements A : « Le microprocesseur présente le défaut A » et B : « Le ,microprocesseur présente le défaut B » sont-ils indépendants ?
2. Quelle est la probabilité que le microprocesseur ne présente que le défaut A ?
3. Quelle est la probabilité que le microprocesseur ne présente aucun défaut ?

Correction

Une usine fabrique des microprocesseurs pouvant présenter deux défauts A et B. Elle a réalisé une étude statistique donnant lesz résultats suivants :

- 9 % des microprocesseurs présentent le défaut A.
- 6 % des microprocesseurs présentent le défaut B.
- 3 % des microprocesseurs présentent les deux défauts.

1. $p(\mathrm{A}) = 0,09$; $p(\mathrm{B}) = 0,06$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,03$.
   $p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) = 0,09 \times 0,06 = 0,0054 \neq p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ donc A et B ne sont pas indépendants.
2. La probabilité que le microprocesseur ne présente que le défaut A est $p\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right)$.
   $\mathrm{A} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right)$ réunion d'événements incompatibles donc :
   $p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + p\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right)$ d'où $p\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right) = p(\mathrm{A}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,09 - 0,03 = 0,06$.
3. La probabilité que le microprocesseur ne présente aucun défaut est $p\left(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}\right)$.
   $p\left(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}\right) = p\left(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}\right) = 1 - p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - \left[p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\right) = 1 - (0,09 + 0,06 - 0,03) = 1 - 0,12 = 0,88$.