BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D’ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Sujet Blanc

MATHÉMATIQUES

Durée de l’épreuve : **4 heures**

L’usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L’usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le candidat traite les **4 exercices.**

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu’il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l’appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu’il est complet.
Ce sujet comporte 6pages numérotées de 1 à 6.

 © Magnard

EXERCICE 1 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n,

par $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$.

Partie A

On a calculé les premiers termes de cette suite à l'aide d'un tableur. Les résultats sont donnés ci-contre.

	A	B
1	**Rang *n***	**Terme *u* *n***
2	0	4
3	1	9
4	2	18
5	3	35
6	4	68
7	5	133
8	6	262

1. Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule B3 et étirée vers le bas afin d'obtenir les termes de la suite u_n ?

2. Quel résultat devrait-on obtenir en cellule B9 ?

Partie B

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > n$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On considère le programme ci-contre, écrit en langage **Python**.

```
from math import*
n=0
u=4
p=int(input("p=?"))
while u<10**p:
    u=2*u-n+1
    n=n+1
print(n)
```

a. Si on saisit la valeur **6** pour la variable **p**, que fait ce programme ?

b. Quelle que soit la valeur que l'on saisisse pour **p**, peut-on affirmer que le programme va s'arrêter ? Justifier.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n,

par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n)est géométrique.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 4 \times 2^n + n$.

c. Vérifier, à l'aide de cette formule, le résultat obtenu à la question **2.** de la partie A.

4. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

a. Compléter l'algorithme suivant afin qu'il calcule cette somme S_n pour un entier n donné.

```
S←0
Saisir un entier n
Pour i de 0 à …. :
   u← 4×2^i+i
   S← S+…
Afficher ….
```

b. Exprimer S_n en fonction de n et en déduire S_{20}.

 © Magnard

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur [0 ; $+\infty$[par $f(x) = \ln(x+1)(4-\ln(x+1))$.
On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

I est le point de C_f d'abscisse $\mathrm{e}^3 - 1$.

1. a. Calculer $f(0)$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. On appelle α la solution non nulle de l'équation $f(x) = 0$. Déterminer α.

3. Démontrer que, pour tout réel positif x, on a $f'(x) = \frac{4-2\ln(x+1)}{x+1}$.

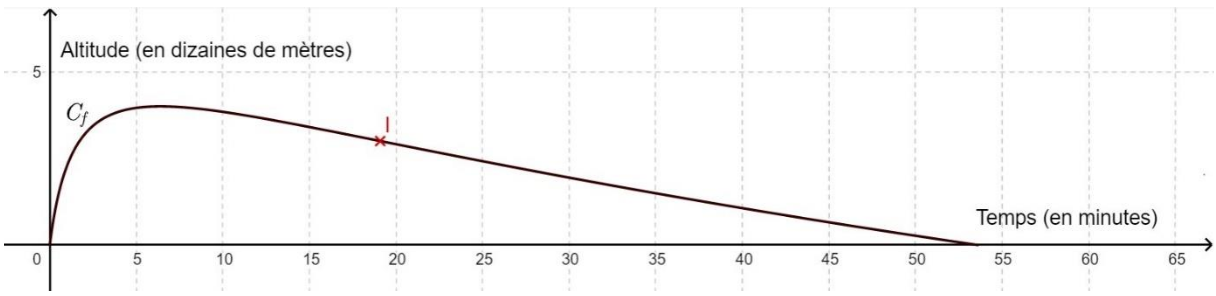
4. En déduire les variations de f et dresser le tableau de variations complet sur $[0\,;+\infty[$.

5. Etudier la convexité de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et justifier que le point I est un point d'inflexion de C_f .

6. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point I.

Partie B

La fonction f de la **partie A**, restreinte à l'intervalle [0 ; α], modélise l'évolution de l'altitude d'un parapentiste . La fonction f et sa courbe représentative tracée ci-dessous donnent l'altitude du parapente (en dizaines de mètres) en fonction du temps t (en min).



1. Quelle est l'altitude maximale atteinte par le parapente ? On arrondira au mètre près.

2. Combien de temps a-t-il mis avant de retourner au sol ? On arrondira le résultat à la seconde près.

3. Lorsqu'il est en phase de descente, on considère que le taux de chute « instantané » (en m·s^{-1})

du parapente, à un instant t donné, est donné par $-f'(t)$.

À quel instant, en minutes, son taux de chute « instantané » est-il maximal ?

Justifier.

 © Magnard

EXERCICE 3 (5 points)

Un artisan peintre doit travailler sur un chantier situé à la périphérie d'une grande ville.
En général, chaque jour de chantier, il arrête de peindre à 16h00 et ensuite il doit prévoir un temps de rangement du chantier. Une fois qu'il a tout rangé, il rentre en voiture chez lui.
Afin d'établir un devis détaillé au client, il cherche à calculer précisément son temps de travail et les coûts de son trajet.

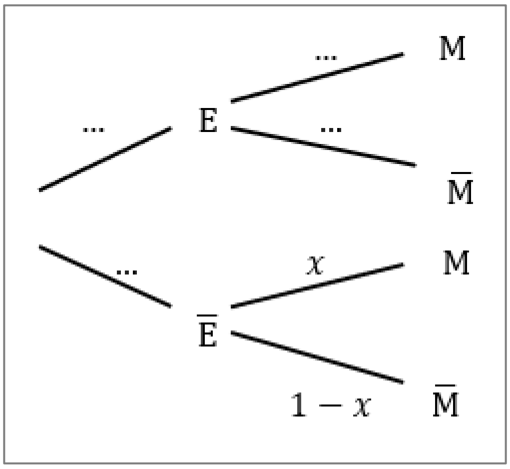
Partie A. Rangement du chantier

Le temps de rangement dépend du type de peinture (à l'huile ou à l'eau) utilisé, mais l'artisan sait par expérience que, trois fois sur quatre, il lui faut moins d'une heure pour tout ranger et mettre sous protection.
D'autre part, depuis qu'il travaille, l'artisan a remarqué qu'il utilise de la peinture à l'eau dans 60% des cas et qu'à chaque fois qu'il utilise de la peinture à l'eau, il met toujours moins d'une heure à tout ranger et mettre sous protection.
On note :
- E l'événement : « L'artisan utilise de la peinture à l'eau »,
- M l'événement : « L'artisan met moins d'une heure à tout ranger et mettre sous protection ».
- $\overline{\mathrm{E}}$ l'événement contraire de E,
- $\overline{\mathrm{M}}$ est l'événement contraire de M.

1. Donner $p(\mathrm{M})$, $p(\mathrm{E})$ et $p_{\mathrm{E}}(\mathrm{M})$.

2. Calculer $p(\mathrm{E} \cap \mathrm{M})$ et $p(\mathrm{E} \cap \overline{\mathrm{M}})$

3. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



4. Démontrer que, si l'artisan utilise de la peinture à l'huile, la probabilité qu'il mette moins d'une heure à tout ranger est égale à $\frac{3}{8}$.

5. Déterminer $p_{\mathrm{M}}(\mathrm{E})$.

 © Magnard

Partie B. Trajet de retour

Étant donné la densité du trafic routier dans la zone de son futur chantier, l'artisan a calculé qu'à la fin de chaque journée de travail, s'il arrive à quitter le chantier avant 17 h 00, il évite les embouteillages sur sa route de retour et peut rentrer sans encombre chez lui.
Sinon, il doit changer d'itinéraire de retour pour ne pas perdre trop de temps en empruntant une autoroute à péage.
De plus, il vient d'apprendre que pour ce chantier il devra utiliser exclusivement de la peinture à l'huile.

1. Quelle est la probabilité que l'artisan rentre sans encombre chez lui à la fin de sa journée de travail ?

2. Son chantier doit durer cinq jours au total. Le nombre de jours où il doit emprunter l'autoroute à péage est une variable aléatoire que l'on appellera *N*.

a. Justifier que *N* suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{5}{8}$.

b. Quelle est la probabilité que l'artisan emprunte exactement trois fois l'autoroute à péage ?
(On arrondira à 10^{-4}).

c. En moyenne, sur ce type de chantier de cinq jours, combien de fois l'artisan devrait-il prévoir d'emprunter l'autoroute à péage ?

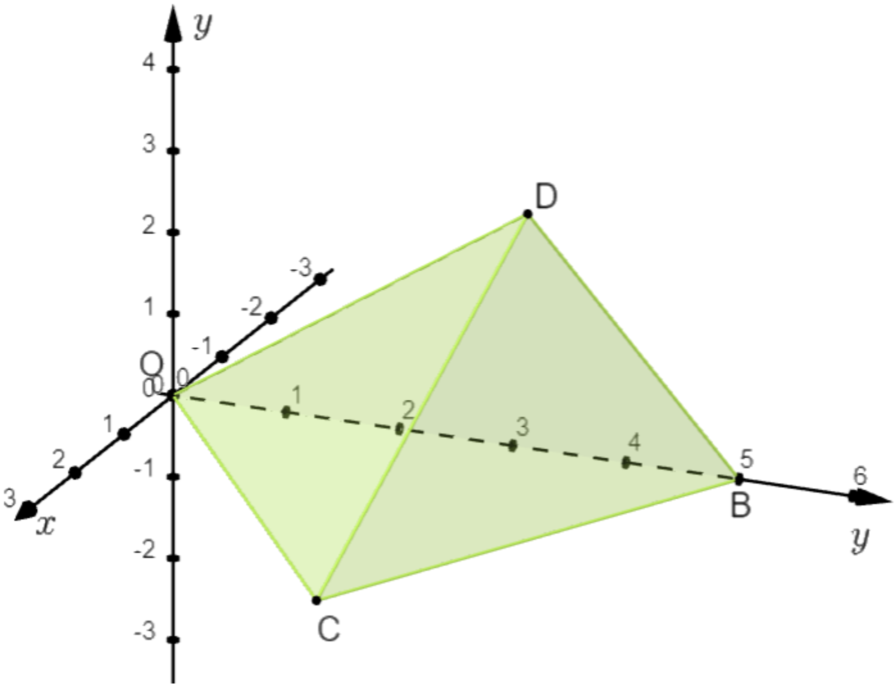
d. Quelle est la probabilité qu'il rentre au moins une fois sans encombre chez lui ?
(On arrondira à 10^{-4}).

e. Si le chantier devait durer plus longtemps, déterminer le nombre minimal de jours que doit durer le chantier pour que la probabilité qu'aurait l'artisan de rentrer au moins une fois sans encombre chez lui soit supérieure à 99 %.

 © Magnard

EXERCICE 4 (5 points)

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\ \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace.
On considère le tétraèdre OBCD tel que O est l'origine du repère, B (0 ; 5 ; 0), C (4 ; 3 ; 0) et D (2 ; 4 ; 4).
Le point I est le milieu de [BC], et [DI] est la hauteur du tétraèdre relative à la face OBC.
Le point A est un point de l'espace, de coordonnées (0 ; 3 ; 3).



Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

Affirmation 1 : « Le triangle OBC est équilatéral. »

Affirmation 2 : « Le volume du tétraèdre est égal à $\frac{40}{3}$. »

Affirmation 3 : « Les arêtes [OC] et [BD] sont orthogonales. »

Affirmation 4 : « Une équation cartésienne du plan (ODI) est $2x - y = 0$. »

Affirmation 5 : « La droite (Δ) parallèle à (BC) passant par A coupe le plan (ODI) en un point E de coordonnées (1 ; 2 ; 3). »

 © Magnard