Elements de correction - Exercices de révisions pour le Bac Blanc de novembre

Exercice 1. La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite ; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $\mathrm{T}_0 = 80$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n = k(\mathrm{T}_n - \mathrm{M}) \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

Dans la suite de la partie A, on choisit $\mathrm{M} = 10$ et $k = -0,2$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n = -0,2(\mathrm{T}_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $\mathrm{T}_{n+1} = 0,8\mathrm{T}_n + 2$.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \mathrm{T}_n - 10$.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\mathrm{T}_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (T_n).
4. On considère l'algorithme suivant :

```
Tant que T ⩾ 40
    T ← 0,8T + 2
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

   (a) Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n.
   Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
   (b) Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - \mathrm{M}).$$

1. Dans cette question, on choisit $\mathrm{M} = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$.
   (a) Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0,2t}}$.
   Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, $f'(t) = 0$.
   (b) En conservant l'hypothèse du **a.**, calculer $f(0)$.
   En déduire, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$.
   (c) Vérifier que la fonction θ trouvée en **b.** est solution du problème.

2. Dans cette question, on choisit $\mathrm{M} = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t, et que, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

   $$g(t) = 10 + 70\mathrm{e}^{-0,2t} \text{où } t \text{est exprimé en minute et} g(t) \text{en degré Celsius.}$$

   Une personne aime boire son café à 40 C.
   (a) Montrer que la fonction g est strictement dcroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
   (b) La suite du problème se fera plus tard pour être rigoureux. En attendant essayer de trouver une réponse...

Correction

Sujet : Asie 2019 (20 juin)

Partie A

1. D'après le contexte, on peut dire que le café est chaud au départ, dans une pièce dont la température est fraiche ; le café va refroidir et sa température va aller vers celle de la pièce,
   donc la suite est décroissante.

2. Montrons que pour tout entier naturel n : $\mathrm{T}_{n+1} = 0,8\mathrm{T}_n + 2$. Pour tout n, $\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n = -0,2(\mathrm{T}_n - 10) \iff \mathrm{T}_{n+1} = \boxed{\mathrm{T}_n - 0,2(\mathrm{T}_n - 10) = 0,8\mathrm{T}_n + 2}$.

3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \mathrm{T}_n - 10$.

   (a) Pour tout n, $u_{n+1} = \mathrm{T}_{n+1} - 10 = 0,8\mathrm{T}_n + 2 - 10 = 0,8\mathrm{T}_n - 8 = 0,8(\mathrm{T}_n - 10) = 0,8u_n$

   donc $\boxed{u_{n+1} = 0,8u_n}$.

   La suite (u_n) est géométrique, de raison $q = 0,8$ et de premier terme $u_0 = \mathrm{T}_0 - 10 = 80 - 10 = 70$.

   (b) On en déduit que, pour tout n, $u_n = u_0 q^n = 70 \times 0,8^n$

   comme $u_n = \mathrm{T}_n - 10 \iff \mathrm{T}_n = u_n + 10$,

   on a donc $\boxed{\mathrm{T}_n = 70 \times 0,8^n + 10}$.

   (c) $-1 < 0,8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$ et aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} 70 \times 0,8^n = 0$

   d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{T}_n = 10}$.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
Tant que T ⩾ 40
    T ← 0,8T + 2
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

   (a) Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n.

   On obtient les valeurs 80 ; 66 ; 54,8 ; 45,84 ; 38,672.

   à la fin de l'algorithme, n vaut 4.

   (b) $\boxed{\text{Au bout de 4 minutes, la température du café est tombée à 40 ˇrC}}$.

Correction

Partie B

1. Dans cette question, on choisit $\mathrm{M} = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$.

   (a) Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0,2t}}$.

   f est un quotient : $f'(t) = \dfrac{\theta'(t) \times \mathrm{e}^{-0,2t} - \theta(t) \times \left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}\right)}{\left(\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2} = \dfrac{-0,2\theta(t)\mathrm{e}^{-0,2t} + 0,2\theta(t)\mathrm{e}^{-0,2t}}{\left(\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2}$

   $f'(t) = \boxed{0}$.

   (b) $f(0) = \dfrac{80}{1} = 80$.

   Puisque $f'(t) = 0$ pour tout t, f est **constante**,

   donc, pour tout t, $f(t) = f(0) = 80$ d'où $\boxed{\theta(t) = 80\mathrm{e}^{-0,2t}}$.

   (c) $\theta(0) = 80$ et $\theta'(t) = 80 \times \left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}\right) = -0,2\theta(t)$

   donc θ est solution du problème.

2. Dans cette question, on choisit $\mathrm{M} = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0 ; +\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t, et que, pour tout t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

   $$g(t) = 10 + 70\mathrm{e}^{-0,2t}, \text{ où } t \text{ est exprimé en minute et } g(t) \text{ en degré Celsius.}$$

   Une personne aime boire son café à 40 C.

   g est dérivable ; $g'(t) = 70 \times \left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}\right) = -14\mathrm{e}^{-0,2t} < 0$ donc g est strictement décroisante sur $[0 ; +\infty[$.

   La suite plus tard...

   Dans l'idée, à la calculatrice, on trouve $t_0 = 4,236$ (min), donc environ 4 min 14 s.

   Le café est à une température de 40řau bout de 4 min 14 s environ.

Exercice 2. 1. On souhaite tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f satisfaisant les conditions suivantes :

- La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.
- Le maximum de la fonction f est 5, il est atteint pour $x = 0$.
- Le minimum de la fonction f est 1.
- La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.

  On note f' la fonction dérivée de f et on sait que $f'(0) = -3$, $f(6) = 3$ et $f'(6) = 2$.
- Le signe de la fonction dérivée f' de f est donné par le tableau suivant :

x	0		4		6
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

(a) Dresser le tableau de variations de la fonction f. On fera figurer dans le tableau les images par f de 0, de 4 et de 6.

(b) Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 6.

(c) Tracer la courbe représentative d'une fonction satisfaisant toutes les conditions ci-dessus.

On placera les points d'abscisses 0, 4, 6 et on tracera les tangentes à la courbe en ces points.

2. Dans cette question toute réponse doit être justifiée.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$.

(a) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.

Dresser le tableau de variation de la fonction g. On précisera les valeurs de $g(0)$, $g(4)$ et $g(6)$.

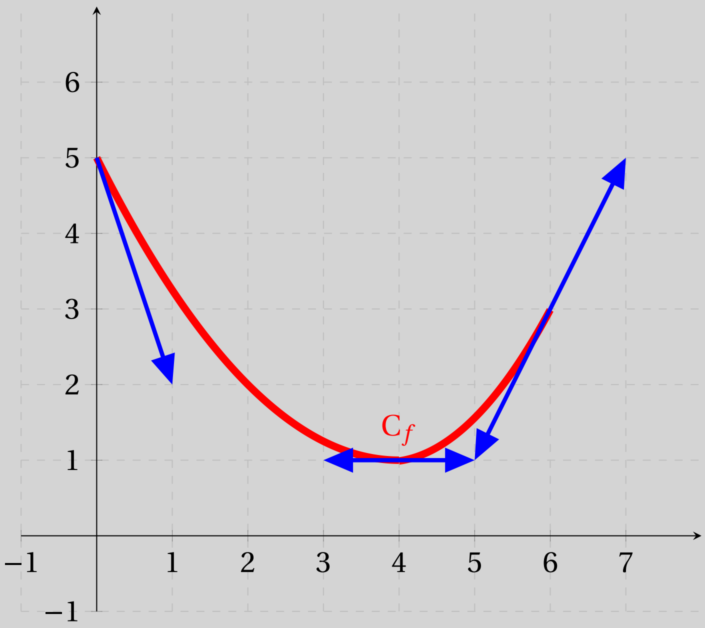
(b) Déterminer $g'(0)$.

Correction

1. (a) Tableau de variations de la fonction f

x	0		4		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de B	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

(b) Une équation de la tangente au point d'abscisse 6 est $y - f(6) = f'(6)(x-6) \iff y-3 = 2(x-6) \iff y = 2x-12+3 \iff y = 2x-9$.

(c) 

2. (a) La fonction exponentielle étant croissante sur $[0\,;\,6]$, la fonction composée g a les mêmes variations que la fonction f, soit décroissante sur $[0\,;\,4]$ puis croissante sur $[4\,;\,6]$

x	0		4		6
Variation de g	e^5	$\searrow$	e	$\nearrow$	e^3

On a $g(0) = \mathrm{e}^{f(0)} = \mathrm{e}^5$; $g(4) = \mathrm{e}^{f(4)} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$; $g(6) = \mathrm{e}^{f(6)} = \mathrm{e}^3$.

(b) On a $g'(x) = f'(x) \times \mathrm{e}^{f(x)} = f'(x) \times g(x)$, d'où $g'(0) = f'(0) \times g(0) = -3 \times \mathrm{e}^5 = -3\mathrm{e}^5$.

Exercice 3.

On considère les nombres complexes $z_1 = 2+3i$ et $z_2 = 5-i$.

Calculer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 \times z_2^2$
2. $\dfrac{z_2}{z_1}$
3. $\dfrac{z_1}{z_2}$
4. $\dfrac{z_1-1}{z_2-4i}$
5. $\overline{z_1} \times \overline{z_2}$
6. $\dfrac{\overline{z_1}-1}{z_2+1}$

Correction

1. $z_1 \times z_2^2 = 78+52i$
2. $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{7}{13} - \dfrac{17}{13}i$
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{7}{26} + \dfrac{17}{26}i$
4. $\dfrac{z_1-1}{z_2-4i} = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i$
5. $\overline{z_1} \times \overline{z_2} = 13-13i$
6. $\dfrac{\overline{z_1}-1}{z_2+1} = \dfrac{9}{37} - \dfrac{17}{37}i$

Exercice 4.

Pour quelles valeurs du réel λ , le nombre complexe $z = (\lambda+i)\,[\lambda+5-i(\lambda-7)]$ est-il imaginaire pur ?

Correction

Commençons par calculer la forme algébrique de z : $z = (\lambda+i)\,[\lambda+5-i(\lambda-7)]$

$= (\lambda+i)(\lambda+5-i\lambda-7i)$

$= \lambda^2+5\lambda-i\lambda^2+7i\lambda+i\lambda+5i-i^2\lambda+7i^2$

$= \lambda^2+5\lambda-i\lambda^2+8i\lambda+5i+\lambda-7$

$= \lambda^2+6\lambda-7+i(-\lambda^2+8\lambda+5)$

Un complexe est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle.

Ici, ceci signifie que $\lambda^2+6\lambda-7=0$

On calcule le discriminant $\Delta = 64$

Donc il y a deux solutions $\lambda_1 = \dfrac{-6+8}{2} = 1$ et $\lambda_2 = \dfrac{-6-8}{2} = -7$

Conclusion : le nombre complexe z est imaginaire pur si λ est égal à 1 ou -7.

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. Vous donnerez les résultats sous forme algébrique.

1. $2iz-3 = z+i$
2. $3z(z+i) = -iz$
3. $(3z-i)(z+2+3i) = 0$
4. $-\dfrac{z}{iz+1} + \dfrac{3z}{z-i} = 3+i$
5. $\dfrac{z-1}{iz+3} = 4i$

Correction

1. $S = \left\{-\dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{5}i\right\}$
2. $S = \left\{0; -\dfrac{4i}{3}\right\}$
3. $S = \left\{\dfrac{i}{3}; -2-3i\right\}$
4. $S = \emptyset$
5. $S = \left\{\dfrac{1}{5} + \dfrac{12}{5}i\right\}$

Exercice 6.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 4z + 53 = 0$
2. $9z^2 - 6z + 37 = 0$
3. $z^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)z + \sqrt{2} = 0$

Correction

1. $S = \{2+7i; 2-7i\}$
2. $S = \left\{\frac{1}{3} + \frac{i}{3}; \frac{1}{3} - \frac{i}{3}\right\}$
3. $S = \left\{1; \sqrt{2}\right\}$

Exercice 7.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) + 13 = 0$
2. $2z^4 - 5z^2 - 18 = 0$

Correction

1. $\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) + 13 = 0$

   On effectue un changement de variables : $Z = \frac{z-3i}{z+2}$ pour $z \neq -2$: $Z^2 + 6Z + 13 = 0$.

   On calcule le discriminant $\Delta = -16$, il a deux valeurs pour Z : $Z_1 = \frac{-6+4i}{2} = -3+2i$ et $Z_2 = -3-2i$

   On est donc ramené à deux équations : avec $z \neq -2$

   - $\frac{z-3i}{z+2} = -3+2i \iff 4z - 2iz = -6+7i \iff z = \frac{-6+7i}{4-2i} \iff z = -\frac{19}{10} + \frac{4}{5}i$
   - $\frac{z-3i}{z+2} = -3+2i \iff 4z + 2iz = -6-i \iff z = \frac{-6-i}{4+2i} \iff z = -\frac{13}{10} + \frac{2}{5}i$

   Donc $S = \left\{-\frac{19}{10} + \frac{4}{5}i; -\frac{13}{10} + \frac{2}{5}i\right\}$
2. $2z^4 - 5z^2 - 18 = 0$

   On effectue un changement de variables : $Z = z^2$ pour $z \neq -2$: $2Z^2 - 5Z - 18 = 0$.

   On calcule le discriminant $\Delta = 169$, il a deux valeurs pour Z : $Z_1 = \frac{5+13}{4} = \frac{9}{2}$ et $Z_2 = \frac{5-13}{4} = -2$

   On est donc ramené à deux équations : avec $z \neq -2$

   - $z^2 = \frac{9}{2} \iff z = \sqrt{\frac{9}{2}}$ ou $z = -\sqrt{\frac{9}{2}} \iff z = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $z = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$
   - $z^2 = -2 \iff z^2 = (i\sqrt{2})^2 \iff z = i\sqrt{2}$ ou $z = -i\sqrt{2}$

   Donc $S = \left\{\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}; i\sqrt{2}; -i\sqrt{2}\right\}$

Exercice 8.

On considère le polynôme $\mathrm{P}(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$ avec $z \in \mathbb{C}$.

1. Calculer $\mathrm{P}(8)$.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{P}(z) = (z-8)(az^2 + bz + c)$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ léquation $\mathrm{P}(z) = 0$.

Correction

On a $\mathrm{P}(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$ avec $z \in \mathbb{C}$.

1. $\mathrm{P}(8) = 8^3 - 12 \times 8^2 + 48 \times 8 - 128 = 512 - 768 + 384 - 128 = 0$.
2. 8 est une racine de P donc P peut se factoriser par $z - 8$

   $\mathrm{P}(z) = (z-8)(az^2 + bz + c) \iff \mathrm{P}(z) = az^3 + (b-8a)z^2 + (c-8b)z - 8c$

   Par identififcation : $\begin{cases} a & = 1 \\ b - 8a & = -12 \\ c - 8b & = 48 \\ -8c & = -128 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 1 \\ b & = -4 \\ c & = 16 \end{cases}$

   Donc $\mathrm{P}(z) = (z-8)(z^2 - 4z + 16)$
3. $\mathrm{P}(z) = 0 \iff (z-8)(z^2 - 4z + 16) = 0 \iff z = 8$ ou $z^2 - 4z + 16 = 0$

   On calcule le discriminant de l'expression $z^2 - 4z + 16 = 0$: $\Delta = -48$

   Il a deux solutions complexes : $z_1 = \dfrac{4 + 4i\sqrt{3}}{2} = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_2 = 2 - 2i\sqrt{3}$

   Donc $\mathrm{S} = \left\{2 + 2i\sqrt{3} ; 2 - 2i\sqrt{3}\right\}$

Exercice 9.

Dire pour quelle valeur de $\lambda \in \mathbb{C}$, le nombre complexe $z = i$ est solution de l'équation suivante :

$$\frac{3z^{30} - z^2 i + z - \lambda}{z^{27} - 1} = i$$

Correction

On doit déterminer λ tel que $\dfrac{3i^{30} - i^2 \times i + i - \lambda}{i^{27} - 1} = i$

On sait que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$ d'où $i^4 = 1$

Alors $i^{30} = i^{28} i^2 = (i^4)^7 \times i^2 = i^2 = -1$

Et $i^{27} = i^{24} i^3 = (i^4)^6 \times i^3 = -i$

D'où $\dfrac{3i^{30} - i^2 i + i - \lambda}{i^{27} - 1} = i \iff \dfrac{-3 + i + i - \lambda}{-i - 1} = i \iff -3 + 2i - \lambda = i(-i - 1)$

$\iff \lambda = -3 + 2i + i^2 + i \iff \lambda = -3 + 3i - 1 \iff \lambda = -4 + 3i$

Conclusion : $z = i$ est solution de l'équation $\dfrac{3z^{30} - z^2 i + z - \lambda}{z^{27} - 1} = i$ si $\lambda = -4 + 3i$