Exo fonction ln(u)

Durée : 2 heures

Nom : .... Prénom : ....

TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Exercice 5
	/ 6	/5	/ 5	/ 3	/3

Exercice 1. – Fonction A – 5 points

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à $1,30$ m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 1[$ par :

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,1[$.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Correction

1. Recherche des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,1[$.

   $f = 30\ln(u)$ avec u définie, continue, dérivable et strictement positive sur $]0\ ;\ 1[$. f est donc dérivable sur $]0\ ;\ 1[$.

   $f = 30\ln(u) \Longrightarrow f' = 30 \times \dfrac{u'}{u}$

$u=\dfrac{v}{w}\Longrightarrow u'=\dfrac{v'w-vw'}{w^2}$ avec $\begin{cases} v(x)=20x \\ w(x)=1-x\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v'(x)=20 \\ w'(x)=-1\end{cases}$ alors $u'(x)=\dfrac{20(1-x)+20x}{(1-x)^2}=\dfrac{20}{(1-x)^2}$

$\forall x\in]0\ ;\ 1[\ ,\ f'(x)=30\times\dfrac{20}{(1-x)^2}\times\dfrac{1-x}{20x}=\dfrac{30}{x(1-x)}>0$

f est donc strictement croissante sur $]0\ ;\ 1[$

2. On doit déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

   $f(x)=20\Longleftrightarrow \ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right)=\dfrac{2}{3}\Longleftrightarrow \dfrac{20x}{1-x}=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\Longleftrightarrow x\left(20+\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\right)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\Longleftrightarrow x=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}{20+\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}=\alpha\approx 0,09$

   $f(x)=120\Longleftrightarrow \ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right)=4\Longleftrightarrow \dfrac{20x}{1-x}=\mathrm{e}^{4}\Longleftrightarrow x\left(20+\mathrm{e}^{4}\right)=\mathrm{e}^{4}\Longleftrightarrow x=\dfrac{\mathrm{e}^{4}}{20+\mathrm{e}^{4}}=\beta\approx 0,73$

   f étant strictement croissante , $f(x)\in[20\ ;\ 120]\Longleftrightarrow x\in[\alpha\ ;\ \beta]$

   Donc $\boxed{\text{le diamètre d'un tronc est entre 9 et 73 cm}}$

Exercice 2. – Fonction C — 5 points

Une entreprise de loisirs possède 60 bateaux et les loue à la semaine. Le coût de fonctionnement hebdomadaire $C(q)$, exprimé en miliers d'euros, correspondant à la location d'un nombre q de bateaux est donné par :

$$C\left(q\right)=15+2q-40\ \ln(0,1\ \ q+1)$$

1. Calculer $C(10)$ et $C(20)$.
2. On considère la fonction définie sur l'intervalle $[0;60]$ par $f(x)=15+2x-40\ \ln(0,1\ \ x+1)$.
   (a) Etudier les variations de f sur $[0;60]$.
   (b) En déduire le coût de fonctionnement hebdomadaire minimal.

<u>Correction</u>

1. $C(10)=15+2\times10-40\ln(0,1\times10+1)\ =15+20-40\ln(1+1)\ =35-40\ln(2)\approx 7,27$

   $C(20)=15+2\times20-40\ln(0,1\times20+1)\ =15+40-40\ln(2+1)\ =55-40\ \ln(3)\approx 11,06$

2. (a) On a $f(x)=15+2x-40\ \ln(0,1\ \ x+1)$ sur $[0;60]$

   La fonction f est donc définie et dérivable sur $[0;60]$ comme somme de fonctions définies et dérivables sur $[0;60]$

   On pose $f=u-40\ln(v)$ d'où $f'=u'-40\dfrac{v'}{v}$

   Avec $u(x)=15+2x$ et $u'(x)=2$ $\qquad v(x)=0,1x+1$ et $v'(x)=0,1$

D'où $f'(x) = 2 - 40 \times \dfrac{0,1}{0,1\ x+1} = 2 - \dfrac{4}{0,1\ x+1} = \dfrac{2(0,1x+1)-4}{0,1\ x+1} = \dfrac{0,2x+2-4}{0,1\ x+1} = \dfrac{0,2x-2}{0,1\ x+1}$

Sur $[0;60]$, $0,1x+1>0$ alors $f'(x)$ est du signe de $0,2x-2$

x	-1		0		$+\infty$
Signe de $0.2x-2$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	$\searrow$		$35-40\ln(2)$		$\nearrow$

avec $f(10) = \mathrm{C}(10) = 35 - 40\ln(2)$

(b) Comme f admet un minimum d'environ $7,27$ en 10

Alors $\boxed{\text{le coût de fonctionnement minimal est de } 7,27 \text{ milliers d'euro soit } 7\ 270\ e}$