DS 4 - mardi 29 mars 2022

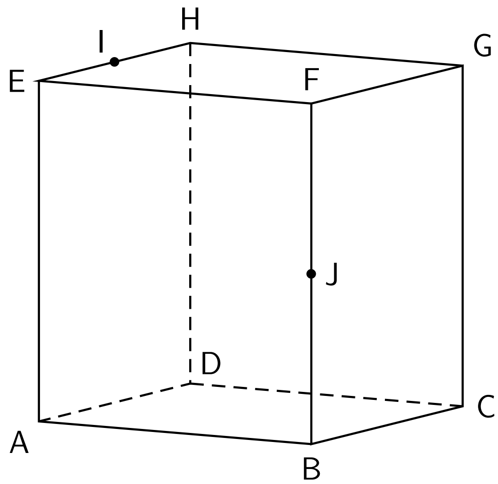
Durée : 3 heures

Nom : .... Prénom : ....

Le candidat traite 3 exercices : les exercices 1 et 2 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice A ou B
	/ 7	/7	/ 6

Exercice 1. 7 points



Dans l'espace, on considère le cube $\mathrm{ABCDEFGH}$ représenté ci-contre.
On note I et J les milieux respectifs des segments $[\mathrm{EH}]$ et $[\mathrm{FB}]$.
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

   (c) On note K le milieu du segment $[\mathrm{HJ}]$. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?
3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.

   (a) En utilisant par exemple le triangle FIG pour base, démontrer que le volume du tétraèdre BFIG est égal à $\dfrac{1}{6}$.

   On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathrm{B} \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).

   (c) La droite Δ coupe le plan (BGI) en F'. Montrer que le point F' a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9}\ ;\ \dfrac{4}{9}\ ;\ \dfrac{5}{9}\right)$.

   (d) Calculer la longueur FF'.

   (e) Connaissant le volume du tétraèdre BFIG, en déduire l'aire du triangle BGI.

Exercice 2. 7 points

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1. Etudier les variations la fonction u sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Etudier la convexité de la fonction u sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
4. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}_g$ la courbe de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln(x)$.

1. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) - g(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.

   (b) En déduire que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2. Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $\mathrm{H}(x) = \dfrac{1}{2}[\ln(x)]^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Le candidat traite un seul des deux exercices A ou B.

Exercice A - Thème : Probabilités et suites 6 points

Dans un pays, suite à une élection, un institut de sondage publie chaque mois la cote de popularité du président (c'est-à-dire le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable à l'action qu'il mène). Ce sondage résulte d'une enquête réalisée auprès d'un échantillon de la population du pays.

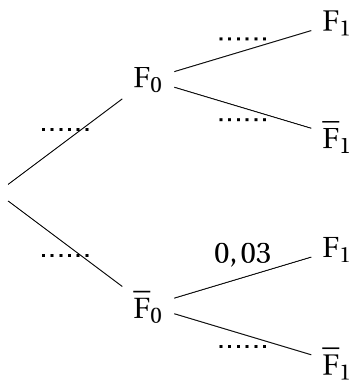
Les enquêtes réalisées révèlent que d'un mois à l'autre :

- 7 % des personnes qui étaient favorables ne le sont plus ;
- 3 % des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent.

On interroge au hasard une personne dans la population du pays et on note :

- F_0 l'évènement « la personne interrogée a une opinion favorable dès l'élection du président » de probabilité p_0 et $\overline{\mathrm{F}_0}$ son évènement contraire ;
- F_1 l'évènement « la personne interrogée le 1er mois (après l'élection) a une opinion favorable » de probabilité p_1 et $\overline{\mathrm{F}_1}$ son évènement contraire.

1. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



   (b) Montrer que $p_1 = 0,9p_0 + 0,03$.

Pour la suite de l'exercice, on donne $p_0 = 0,55$ et on note, pour tout entier naturel n, F_n l'évènement « la personne interrogée le n-ième mois a une opinion favorable » et p_n sa probabilité.
On admet de plus, que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,9p_n + 0,03$.

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = p_n - 0,3$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et préciser la valeur de son premier terme u_0.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.
3. (a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $0,25 \times 0,9^n + 0,3 \leqslant 0,4$.
   (b) Interpréter le résultat trouvé.

Exercice B - Thème : Probabilités et loi binomiale 6 points

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs. On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

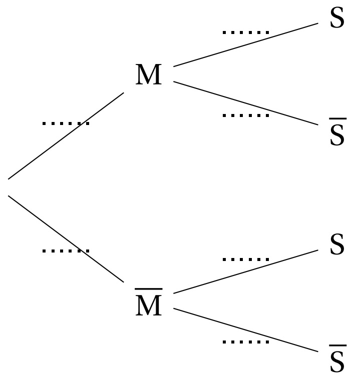
On note :
- S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que :
   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à $0{,}97$;
   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à $0{,}97$.

   (a) À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}(\overline{S})$.

   (b) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous illustrant cette situation.



   (c) Montrer que : $P(S) = 0{,}031\,88$.

   (d) En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. (On arrondira le résultat à 10^{-3}.)

2. 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à $0{,}031\,88$.

   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   (b) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

   (c) Sans le justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :
   - la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
   - la probabilité qu'au maximum 7 personnes fassent sonner le portique.

   (d) Donner la valeur du plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}9$.