DS 3 - lundi 20 janvier 2020

Durée : 50 min

Nom : .... Prénom : ....

Exercice 1. 13 points

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**

   (a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

   $$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

   Étudier le sens de variation de la fonction g.

   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

   Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;\,0{,}704[$.

   (c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **Étude de la fonction f**

   (a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   (b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   (c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   (d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

   (e) Justifier que $3{,}43 < m < 3{,}45$.

Correction

1. (a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.

   Pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$: $g'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x \geqslant 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ (car tous les termes sont positifs.

   La fonction g est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ (car la dérivée ne s'annule qu'en 0).

   (b) $g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$. Dressons le tableau de variations de g :

x	0		a		1		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\mathrm{e}-1$	$\nearrow$	

   D'après ce tableau de variations, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;1]$; on appelle a cette solution.

   $g(0,703) \approx -0,0018 < 0$ et $g(0,704) \approx 0,002 > 0$ donc $a \in [0,703;0,704]$.

   (c) D'après le tableau de variations de g :
   - $g(x) < 0$ sur $[0;a[$
   - $g(x) > 0$ sur $]a;+\infty[$

2. (a)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x = 1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\mathrm{e}^x + \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{e}^x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x} = 0\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{x\to +\infty}\mathrm{e}^x + \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

   (b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2\mathrm{e}^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

   (c) Pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

   On dresse le tableau de variation de f :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Correction

2.(d) D'après son tableau de variation, la fonction f admet le nombre $f(a)$ comme minimum sur son intervalle de définition.

$f(a) = \mathrm{e}^a + \dfrac{1}{a}$. Or a est la solution de l'équation $g(x) = 0$ donc

$g(a) = 0 \iff a^2\mathrm{e}^a - 1 = 0 \iff a^2\mathrm{e}^a = 1 \iff \mathrm{e}^a = \dfrac{1}{a^2}$.

On en déduit que $f(a) = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$ et on a donc démontré que la fonction f admettait pour minimum sur $]0\,;\,+\infty[$ le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

2.(e)

On a successivement(en valeurs approchées) :

$$0,703 < a < 0,704$$
$$0,4942 < a^2 < 0,4957$$
$$\frac{1}{0,4957} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{0,4942}$$
$$2,017 < \frac{1}{a^2} < 2,024$$

$$0,703 < a < 0,704$$
$$\frac{1}{0,704} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0,703}$$
$$1,420 < \frac{1}{a} < 1,423$$

donc par somme : $2,017 + 1,420 < \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a} < 2,024 + 1,423$ et donc :

$3,43 < m < 3,45$

Exercice 2. 4 points

On considère un cube ABCDEFCH donné en annexe.

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point du segment [HG] tel que $\text{HP} = \dfrac{1}{4}\text{HG}$.

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.

   Construire le point L

2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.

   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.

   (a) Pourquoi les points T et Q existent-ils ?

   Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.

   (b) Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Correction

Sujet : Amérique du nord - 2014

1. Dans le plan (EFG), les droites (PM) et (FG) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.
2. (a) Les droites (LN), (BF) et (CG) sont coplanaires (dans le plan (BCG))... d'où les constructions de T et Q.

   (b) L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est une droite.

   Plusieurs manières de faire cette construction :

   - On peut construire 2 points de la droite intersection :

     Q est un point de l'intersection des plans (MNP) (car appartient à (LN), où L et N sont dans (MNP)) et (ABF) (car appartient à (BF)).

     Dans le plan (EFG), les droites (MP) et (EF) ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes en un point R qui est aussi un point de l'intersection des plans (MNP) (car sur (MP)) et (ABF) (car sur (EF)).

     L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est donc la droite (RQ)
   - On peut utiliser un point et la direction

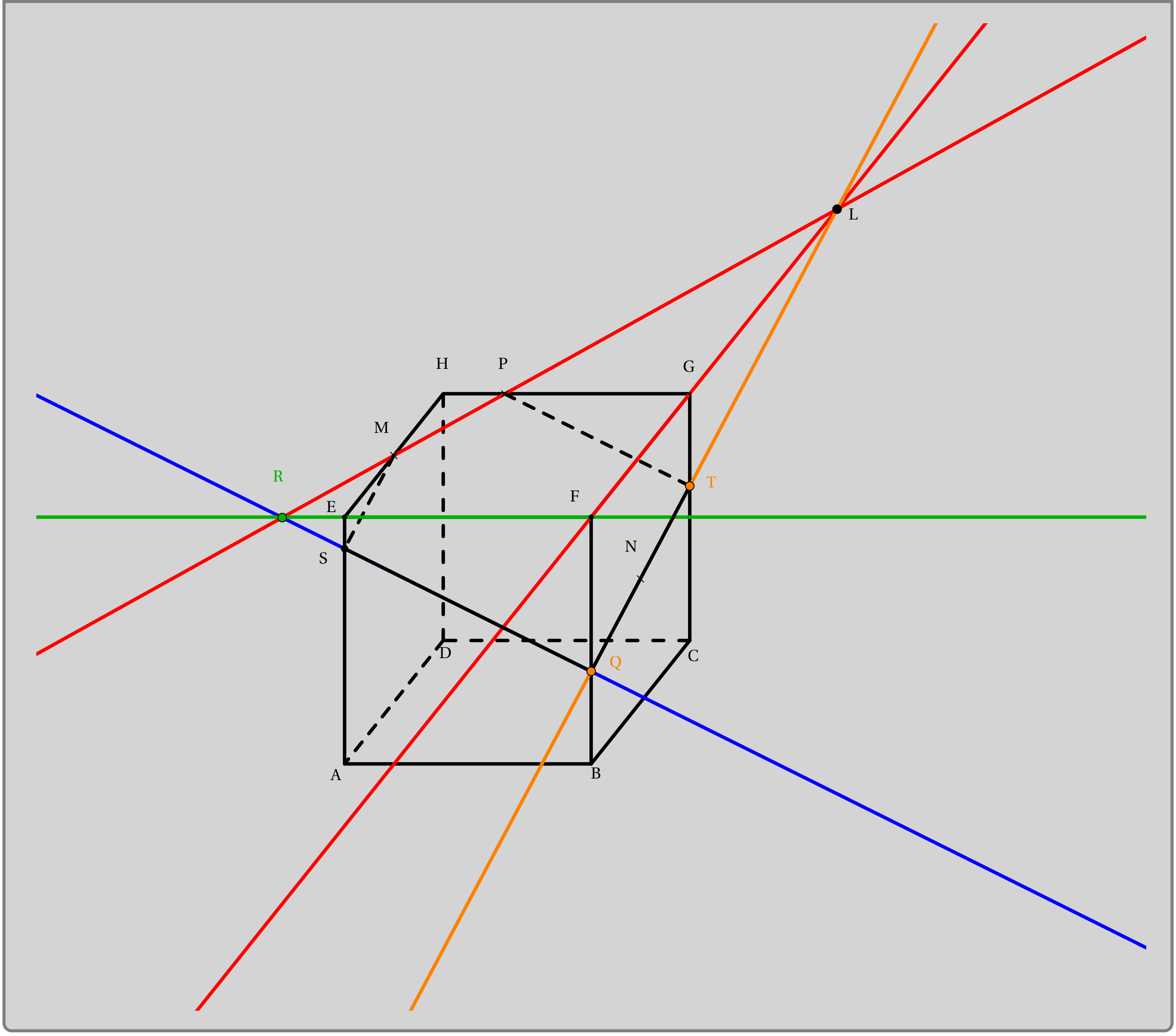
     On a déjà vu que Q est un point de la droite cherchée.

     Les deux plans (ABF) et (CDG) sont parallèles, ils sont donc coupés par le plan (MNP) selon deux droites parallèles. Or, les points P et T sont à la fois dans (MNP) et (CDG), donc l'intersection de ces deux plans est (PT).

     L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est donc la droite parallèle à (PT) passant par Q.
3. Notons S le point d'intersection de (AE) et (QR).

   La section du cube par le plan (MNP) est le polygone MPTQS.

Correction



Exercice 3. 3 points

1. Résoudre l'équation $\ln(2-x)=4$
2. Résoudre l'inéquation $e^x+5>4e^x$
3. Résoudre l'équation $\ln(x-2)+\ln(x-32)=6\ln 2$

Correction

1. Résoudre l'équation $\ln(2-x)=4$

   - Ensemble de définition : $]-\infty\ ;\ 2[$ car on doit résoudre l'inéquation $2-x>0$ soit $2>x$.
   - Résolution : $\ln(2-x)=4 \iff 2-x=e^4 \iff x=e^4+2$

     Comme $x=e^4+2>2$ alors la solution n'appartient pas à l'intervalle de définition,
   - Conclusion : $\boxed{\mathscr{S}=\varnothing}$

2. Résoudre l'inéquation $e^x+5>4e^x$

   - Ensemble de définition : $]\infty;+\infty[$
   - Résolution : $e^x+5>4e^x \iff e^x-4e^x>5 \quad -3e^x>-5$

     $$\begin{aligned}&\iff e^x<\frac{5}{3}\\ &\iff e^x<e^{ln\left(\frac{5}{3}\right)}\\ &\iff x<ln\left(\frac{5}{3}\right)\end{aligned}$$
   - Conclusion : $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty;ln\left(\frac{5}{3}\right)\right[}$

3. Résoudre l'équation $\ln(x-2)+\ln(x-32)=6\ln 2$

   - Ensemble de définition : $\mathscr{D}=]32\ ;\ +\infty[$ car on doit avoir : $\begin{cases}x-2>0 \iff x>2\\ x-32>0 \iff x>32\end{cases}$
   - Résolution : Pour $x\in\mathscr{D}$, $\ln(x-2)+\ln(x-32)=6\ln 2 \iff \ln((x-2)(x-32))=\ln\left(2^6\right)$

     $$\begin{aligned}&\iff (x-2)(x-32)=64.\\ &\iff x^2-32x-2x+64=64\\ &\iff x^2-34x=0\\ &\iff x(x-34)=0\\ &\iff x=0 \text{ ou } x=34\end{aligned}$$

     Comme $0\notin\mathscr{D}$ et $34\in\mathscr{D}$
   - Conclusion : $\boxed{\mathscr{S}=\{34\}}$

Annexe : DS 3 - lundi 20 janvier 2020

Nom : .... Prénom : ....