DS 3 - lundi 20 janvier 2020

Durée : 50 min

Nom : .... Prénom : ....

Exercice 1. 13 points

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**

   (a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

   $$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

   Étudier le sens de variation de la fonction g.

   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

   Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;\,0{,}704[$.

   (c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **Étude de la fonction f**

   (a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   (b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   (c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   (d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

   (e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

Exercice 2. 4 points

On considère un cube ABCDEFCH donné en annexe.

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point du segment [HG] tel que HP = $\frac{1}{4}$HG.

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.

   Construire le point L

2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.

   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.

   (a) Pourquoi les points T et Q existent-ils ?

   Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.

   (b) Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Exercice 3. 3 points

1. Résoudre l'équation $\ln(2-x) = 4$
2. Résoudre l'inéquation $e^x + 5 > 4e^x$
3. Résoudre l'équation $\ln(x-2) + \ln(x-32) = 6\ln 2$

Annexe : DS 3 - lundi 20 janvier 2020

Nom : .... Prénom : ....