DS 2 - lundi 9 decembre 2019

Durée : 50 min

Nom : .... Prénom : ....

Exercice 1. 8 points

On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.

On note A l'événement « l'urne a est choisie » , B l'événement « l'urne b est choisie » et R l'événement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

On note $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{R})$ la probabilité conditionnelle de l'événement R par rapport à l'événement A.

1. Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches.

   (a) Déterminer les probabilités suivantes : $p(\mathrm{A})$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{R})$, $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{R})$.

   (b) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

   (c) Montrer que $p(\mathrm{R}) = \dfrac{13}{30}$

   (d) Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne a ?

2. Dans cette question, on suppose que l'urne a contient quatre boules blanches et l'urne b deux boules blanches.

   L'urne a contient en outre n boules rouges (où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne b en contient $5 - n$.

   (a) Exprimer $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{R})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{R})$ en fonction de n.

   (b) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

   (c) Démontrer que $p(\mathrm{R}) = \dfrac{-n^2 + 4n + 10}{(4+n)(7-n)}$.

   (d) On sait que n est un entier inférieur ou égal à 5. n ne prend donc que six valeurs entières.
   Déterminer la répartition possible des cinq boules rouges entre les urnes a et b donnant la plus grande valeur possible de $p(\mathrm{R})$.

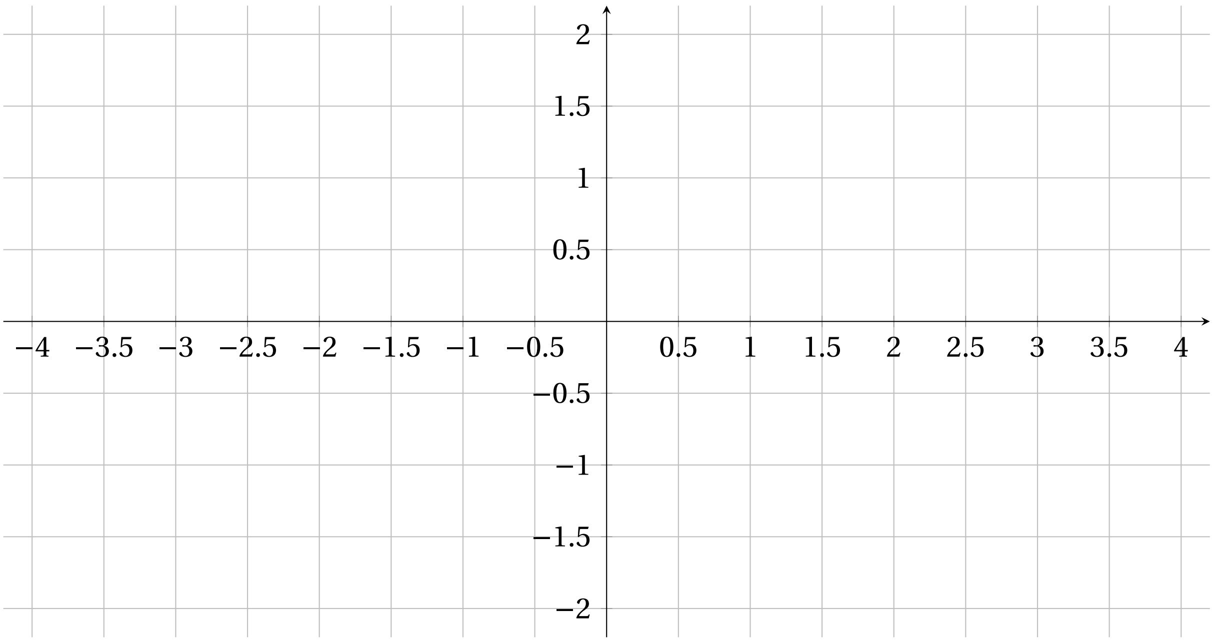
Exercice 2. 9 points

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$. On note C_f sa courbe représentative.

1. Pourquoi la fonction f est-elle définie sur $\mathbb{R}$?
2. (a) Montrer que si $x \neq 0$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}$

   (b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter géométriquement.
3. (a) Déterminer la fonction dérivée f'.

   (b) Etudier le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation de la fonction f .
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
5. Tracer, ci-dessous, soigneusement la courbe C_f, en indiquant la tangente horizontale, et la tangente (T).



Exercice 3. 3 points

QCM sur les limites, cocher la ou les bonnes réponses (sans justifier)

(+0,5 points par bonnes réponses et -0,25 points par mauvaises réponses)

1. La limite de $f(x)$ lorsque x tend $+\infty$, est égale à -2.

   Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

   - ☐ f admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.
   - ☐ f admet une asymptote d'équation $x = -2$.
   - ☐ f admet une asymptote verticale au voisinage de $+\infty$.

2. Si la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f.

   Parmi les affirmations suivantes, laquelle/lesquelles est/sont vraie(s) ?

   - ☐ La courbe de la fonction f admet au moins une asymptote horizontale.
   - ☐ Une limite de f en l'infini est nécessairement égale à -2.
   - ☐ Une limite de f en -2 est nécessairement infinie.

3. On sait que f et g sont deux fonctions tel que :

   - la limite en $+\infty$ de f est égale à $-\infty$.
   - lorsque x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers -2.

   Parmi les affirmations suivantes, laquelle/lesquelles est/sont vraie(s) ?

   - ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = +\infty$
   - ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + g(x) = -\infty$
   - ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(f(x)) = -2$

4. f et g sont deux fonctions. Pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{3x-2}{4x^2+3} + f(x)$

   Lorsque x tend vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers 3. Que peut-on dire de la limite de la fonction g en $-\infty$?

   - ☐ On ne peut rien dire du tout.
   - ☐ Lorsque x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers 0.
   - ☐ La limite de g en $-\infty$ est aussi égale à 3.

5. f, g et h sont trois fonctions. On suppose que pour tout réel x, $f(x) < g(x) < h(x)$.

   Lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers 5 et $h(x)$ tend vers $+\infty$.

   Que peut-on dire de la limite de la fonction g en $+\infty$?

   - ☐ La limite de g en $+\infty$ peut être égale à 0.
   - ☐ La limite de g en $+\infty$ peut être égale à 5.
   - ☐ La limite de g en $+\infty$ peut être égale à $+\infty$.