DS 2 - lundi 9 decembre 2019

Durée : 50 min

Nom : .... Prénom : ....

Exercice 1. 8 points

On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.

On note A l'événement « l'urne a est choisie » , B l'événement « l'urne b est choisie » et R l'événement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

On note $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{R})$ la probabilité conditionnelle de l'événement R par rapport à l'événement A.

1. Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches.

   (a) Déterminer les probabilités suivantes : $p(\mathrm{A})$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{R})$, $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{R})$.

   (b) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

   (c) Montrer que $p(\mathrm{R}) = \dfrac{13}{30}$

   (d) Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne a ?

2. Dans cette question, on suppose que l'urne a contient quatre boules blanches et l'urne b deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges (où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne b en contient $5-n$.

   (a) Exprimer $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{R})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{R})$ en fonction de n.

   (b) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

   (c) Démontrer que
   $$p(\mathrm{R}) = \frac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}.$$

   (d) On sait que n est un entier inférieur ou égal à 5. n ne prend donc que six valeurs entières.
   Déterminer la répartition possible des cinq boules rouges entre les urnes a et b donnant la plus grande valeur possible de $p(\mathrm{R})$.

Correction

Sujet : France septembre 2001

On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.

On note A l'événement « l'urne a est choisie » , B l'événement « l'urne b est choisie » et R l'événement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

On note $p_{\text{A}}(\text{R})$ la probabilité conditionnelle de l'événement R par rapport à l'événement A.

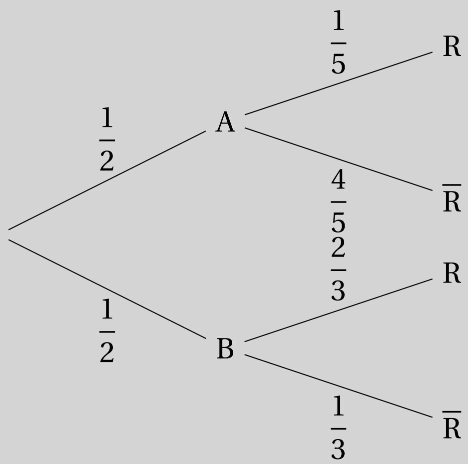
1. Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches.

   (a) Comme le choix de l'urne se fait au hasard : $\boxed{p(\text{A}) = \dfrac{1}{2}}$

   Sachant qu'on a pris l'urne a, il y a 1 boule rouge parmi les 5 boules donc $\boxed{p_{\text{A}}(\text{R}) = \dfrac{1}{5}}$

   $p(\text{A} \cap \text{R}) = p_{\text{A}}(\text{R}) \times p(\text{A}) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{10}$ donc $\boxed{p(\text{A} \cap \text{R}) = \dfrac{1}{10}}$

   (b) Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



   (c) On sait que A et B forment une partition

   D'après la formule des probabilités totales

   $p(\text{R}) = p_{\text{A}}(\text{R}) \times p(\text{A}) + p_{\text{B}}(\text{R}) \times p(\text{B})$

   $p(\text{R}) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3+10}{30} = \boxed{\dfrac{13}{30}}$

   (d) $p_{\text{R}}(\text{A}) = \dfrac{p(\text{A} \cap \text{R})}{p(\text{R})} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{13}{30}} = \boxed{\dfrac{3}{13}}$

Correction

2. Dans cette question, on suppose que l'urne a contient quatre boules blanches et l'urne b deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges (où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne b en contient $5-n$.

   On remarque que c'est une généralisation de la situation précédente.

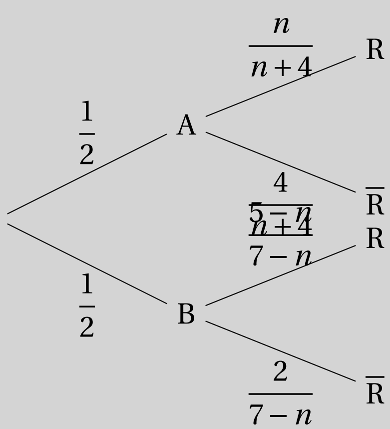
   (a) Dans l'urne a, il y a n boules rouges parmi les $4+n$ boules

   Donc $p(\mathrm{A})(\mathrm{R}) = \dfrac{n}{4+n}$

   Dans l'urne b, il y a $5-n$ boules rouges parmi les $5-n+2=7-n$ boules

   Donc $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{R}) = \dfrac{5-n}{7-n}$.

   (b) Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



   (c) On sait que A et B forment une partition

   D'après la formule des probabilités totales

   $p(\mathrm{R}) = p(\mathrm{A}\cap\mathrm{R}) + p(\mathrm{B}\cap\mathrm{R}) = p_{\mathrm{A}}(\mathrm{R}) \times p(\mathrm{A}) + p_{\mathrm{B}}(\mathrm{R}) \times p(\mathrm{B})$

   $p(\mathrm{R}) = \dfrac{n}{4+n} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{5-n}{7-n} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{n(7-n)+(5-n)(4+n)}{2(4+n)(7-n)} = \dfrac{-2n^2+8n+20}{2(4+n)(7-n)} = \dfrac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}$.

   Donc $\boxed{p(\mathrm{R}) = \dfrac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}}$.

   (d) On sait que n est un entier inférieur ou égal à 5. n ne prend donc que six valeurs entières.

   On renseigne un tableau de valeurs :

n	0	1	2	3	4	5
$\dfrac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}$	0,357	0,433	0,467	0,464	0,417	0,278

   La plus grande valeur possible de $p(\mathrm{R})$ a lieu pour $n=2$

   Donc il faut quatre boules blanches et deux boules rouges dans l'urne a et deux boules blanches et trois boules rouges dans l'urne b.

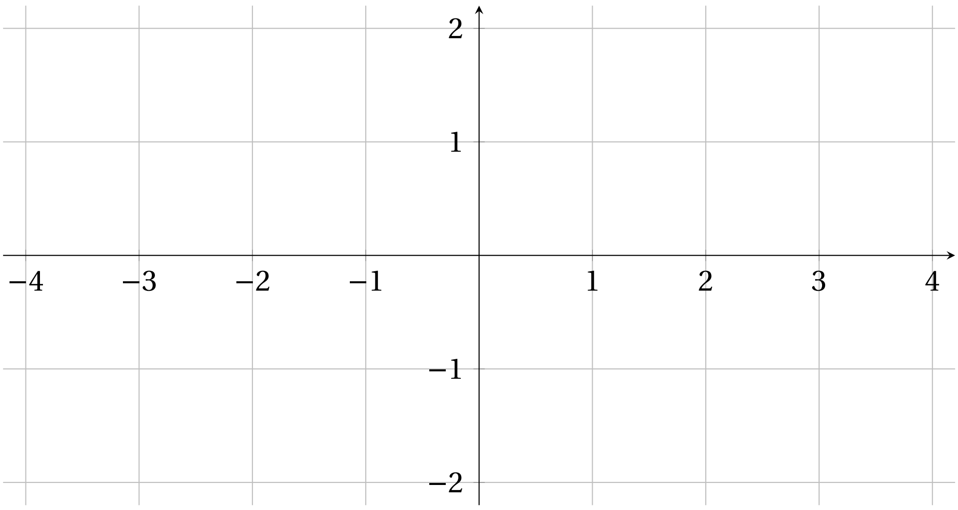
Exercice 2. 9 points

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$. On note C_f sa courbe représentative.

1. Pourquoi la fonction f est-elle définie sur $\mathbb{R}$?
2. (a) Montrer que si $x \neq 0$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}$

   (b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter géométriquement.
3. (a) Déterminer la fonction dérivée f'.

   (b) Etudier le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
5. Tracer, ci-dessous, soigneusement la courbe C_f, en indiquant la tangente horizontale, et la tangente (T).



Correction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$. On note C_f sa courbe représentative.

1. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > x \Leftrightarrow e^x - x > 0$.

   Le dénominateur n'est donc jamais nul.

   Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Si x est non nul, on divise num'erateur et dénominateur par x :

   $$f(x) = \frac{x}{e^x - x} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{e^x - x}{x}} = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$$

   Donc $f(x) = \dfrac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$

   (b)
   - En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

     Alors par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$

     D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 = -1$

     Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = -1$

     Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

   - En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

     Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 = +\infty$

     Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = 0$

     Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

   - C_f admet 2 asymptotes horizontales $y = 0$ en $+\infty$ et $y = -1$ en $-\infty$.

Correction

3. (a) On sait que $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$ et la fontion f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $u'(x) = 1$

$v(x) = e^x - x$ et $v'(x) = e^x - 1$

Et $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

D'où $f'(x) = \dfrac{1(e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x - x - xe^x + x)}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x - xe^x)}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x(1-x))}{(e^x - x)^2}$

Donc $f'(x) = \dfrac{e^x(1-x))}{(e^x - x)^2}$

(b) On sait que $f'(x) = \dfrac{e^x(1-x))}{(e^x - x)^2}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $(e^x - x)^2 > 0$

Donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	-1	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

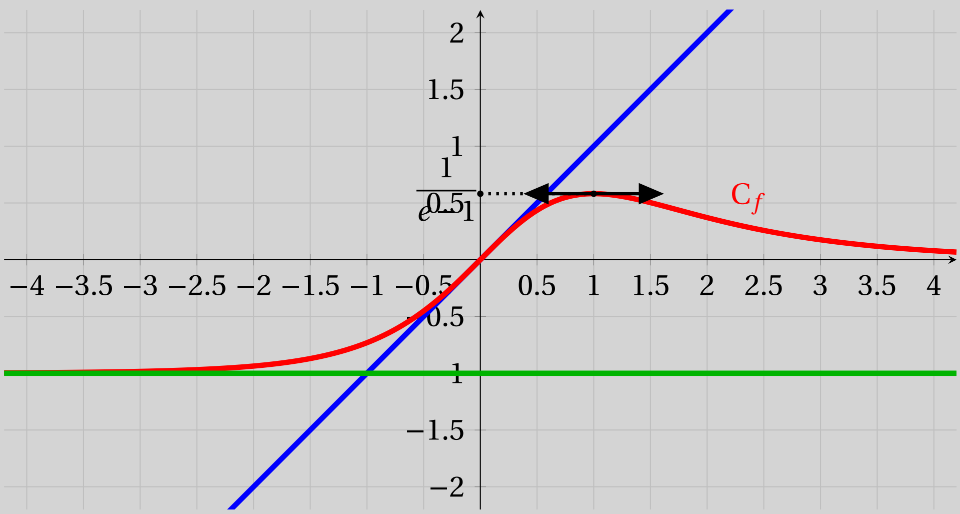
4. L'équation de la tangente en 0 de la fonction f est : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

Comme $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$

Donc l'équation de la tangente en 0 de la fonction f est : $y = x$

5. Tracer, ci-dessous, soigneusement la courbe C_f, en indiquant la tangente horizontale, et la tangente (T).

Pour tracer soigneusement C_f , on calcule quelques images : $f(1) = \dfrac{1}{e-1} \approx 0,58$, $f(0) = 0$, $f(-1) = \dfrac{1}{e^{-1}+1} \approx -0,73$ et $f(2) = \dfrac{2}{e^2 - 2} \approx 0,37$



Exercice 3. 3 points

QCM sur les limites, cocher la ou les bonnes réponses (sans justifier)

(+0,5 points par bonnes réponses et -0,25 points par mauvaises réponses)

1. La limite de $f(x)$ lorsque x tend $+\infty$, est égale à -2. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?
   - ☐ f admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.
   - ☐ f admet une asymptote d'équation $x = -2$.
   - ☐ f admet une asymptote verticale au voisinage de $+\infty$.
2. Si la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f.
   Parmi les affirmations suivantes, laquelle/lesquelles est/sont vraie(s) ?
   - ☐ La courbe de la fonction f admet au moins une asymptote horizontale.
   - ☐ Une limite de f en l'infini est nécessairement égale à -2.
   - ☐ Une limite de f en -2 est nécessairement infinie.
3. On sait que f et g sont deux fonctions tel que :
   - la limite en $+\infty$ de f est égale à $-\infty$.
   - lorsque x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers -2.

   Parmi les affirmations suivantes, laquelle/lesquelles est/sont vraie(s) ?
   - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty$
   - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = -\infty$
   - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(f(x)) = -2$
4. f et g sont deux fonctions. Pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{3x-2}{4x^2+3} + f(x)$
   Lorsque x tend vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers 3. Que peut-on dire de la limite de la fonction g en $-\infty$?
   - ☐ On ne peut rien dire du tout.
   - ☐ Lorsque x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers 0.
   - ☐ La limite de g en $-\infty$ est aussi égale à 3.
5. f, g et h sont trois fonctions. On suppose que pour tout réel x, $f(x) < g(x) < h(x)$.
   Lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers 5 et $h(x)$ tend vers $+\infty$.
   Que peut-on dire de la limite de la fonction g en $+\infty$?
   - ☐ La limite de g en $+\infty$ peut être égale à 0.
   - ☐ La limite de g en $+\infty$ peut être égale à 5.
   - ☐ La limite de g en $+\infty$ peut être égale à $+\infty$.

Correction

QCM sur les limites, cocher la ou les bonnes réponses (sans justifier)

(+0,5 points par bonnes réponses et -0,25 points par mauvaises réponses)

1. La limite de $f(x)$ lorsque x tend $+\infty$, est égale à -2.

   9 Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

   - ☐ f admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$. - Vrai -
   - ☐ f admet une asymptote d'équation $x = -2$.
   - ☐ f admet une asymptote verticale au voisinage de $+\infty$.

   Explication : la limite de $f(x)$ lorsque x tend $+\infty$, est égale à -2, donc la droite d'équation $y = -2$ est une asymptote horizontale de C_f en $+\infty$.

2. Si la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f.

   Parmi les affirmations suivantes, laquelle/lesquelles est/sont vraie(s) ?

   - ☐ La courbe de la fonction f admet au moins une asymptote horizontale.
   - ☐ Une limite de f en l'infini est nécessairement égale à -2.
   - ☐ Une limite de f en -2 est nécessairement infinie. - Vrai -

   Explication : si la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote à C_f, alors la limite de f en -2 est nécessairement infinie.

3. On sait que f et g sont deux fonctions tel que :

   - la limite en $+\infty$ de f est égale à $-\infty$.
   - lorsque x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers -2.

   Parmi les affirmations suivantes, laquelle/lesquelles est/sont vraie(s) ?

   - ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = +\infty$
   - ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + g(x) = -\infty$
   - ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(f(x)) = -2$ - Vrai -

   Explication : g n' a pas forcément de limite en $+\infty$, donc $lim(f \times g)$, en $+\infty$, n' a pas forcémment de sens.

   De même pour donc $lim(f + g)$, en $+\infty$.

   Par contre $g(f(x))$ a une limite en $+\infty$, puisque :

   La limite en $+\infty$ de f est égale à $-\infty$ et que :

   La limite en $-\infty$ de g est égale à -2.

Correction

4. f et g sont deux fonctions. Pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{3x-2}{4x^2+3} + f(x)$.

   Lorsque x tend vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers 3. Que peut-on dire de la limite de la fonction g en $-\infty$?

   - ☐ On ne peut rien dire du tout.
   - ☐ Lorsque x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers 0.
   - ☐ La limite de g en $-\infty$ est aussi égale à 3. - Vrai -

   Explication : g est la somme de deux terme : le 1er terme tend vers 0 en $-\infty$.

   Il suffit pour cela de factoriser le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

   La deuxième terme est la limite de f en $-\infty$.

   Par opération sur les limites, on a donc : La limite de g en $-\infty$ est aussi égale à 3.

5. f, g et h sont trois fonctions. On suppose que pour tout réel x, $f(x) < g(x) < h(x)$.

   Lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers 5 et $h(x)$ tend vers $+\infty$.

   Que peut-on dire de la limite de la fonction g en $+\infty$?

   - ☐ La limite de g en $+\infty$ peut être égale à 0.
   - ☐ La limite de g en $+\infty$ peut être égale à 5. - Vrai -
   - ☐ La limite de g en $+\infty$ peut être égale à $+\infty$. - Vrai -

   Explication : si g a une limite L, par passage à la limite $5 \leq$ L