DS 2 - mardi 13 décembre 2022 - sujet B

Durée : 1h50 Calculatrice est autorisée

Nom : .... Prénom : ....

TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
	/ 8	/4	/6,5	/ 1,5

Exercice 1. 8 points

On considère les fonctions h et f définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x) = x - \frac{1}{4}x^2$ et $f(x) = \ln(2x+1)$.
On note P la courbe représentative de h et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. Étudier les variations de la fonction h sur $[0;+\infty[$.
2. (a) Étudier les variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.
   (b) Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}_0$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. On se propose d'étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à P. Pour cela on considère la fonction ψ, définie sur $[0;+\infty[$ par $\psi(x) = f(x) - h(x)$.
   (a) Calculer la dérivée ψ' de ψ. En déduire le sens des variation de ψ.
   (b) Calculer $\psi(0)$. Déterminer enfin le signe de ψ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   On pourrait également démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de sa tangente $\mathscr{T}_0$.
4. (a) Déterminer une primitive H de la fonction h sur $[0;+\infty[$.
   (b) Montrer que la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(2x+1) - \left(x+\frac{1}{2}\right)$ est une primitive de la fonction f.
   (c) La suite du problème se fera au moins de mars, il vous faudra encore un peu de patience !

Exercice 2. 4 points

On donne la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n, par : $\begin{cases} t_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout naturel n, on a : $t_n = \dfrac{n}{n+1}$
2. Que peut-on dire sur la convergence de la suite (t_n). Justifier.

Exercice 3. 6,5 points

Une entreprise fabrique des balles de tennis et dispose de trois chaines de fabrication appelées A, B, C.

- La chaine A fabrique 30 % de la production totale de l'entreprise.
- La chaine B en fabrique 10 %.
- La chaine C fabrique le reste de la production.

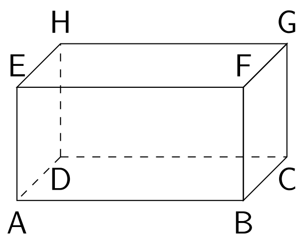
En sortie de chaines, certaines balles peuvent présenter un défaut : 5 % des balles issues de la chaine A ; 5 % des balles issues de la chaine B et 4 % des balles issues de la chaine C présentent un défaut.

On choisit au hasard une balle dans la production de l'entreprise et on note les évènements :

- A : « la balle provient de la chaine A » ;
- B : « la balle provient de la chaine B » ;
- C : « la balle provient de la chaine C » ;
- D : « la balle présente un défaut ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
2. Comment se note la probabilité de l'évènement « la balle présente un défaut et provient de la chaine B » ?
3. Montrer que $P(D)$, la probabilité de l'évènement D, vaut $0,044$.
4. Calculer $P_D(A)$, la probabilité de A sachant D, et donner un résultat arrondi à $0,001$. Interpréter le resultat obtenu.
5. On choisit 12 balles au hasard dans la production totale qui est suffisamment importante pour que ce choix puisse être assimilé à douze tirages indépendants avec remise.
   (a) Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de balles possédant un défaut. Déterminer la loi de probablité de X dans cette situation.
   (b) Quelle est la probabilité pour que 3 balles possèdent un défaut ? Arrondir le résultat à 0,000 1 et justifier la réponse.
   (c) Quelle est la probabilité pour qu'au moins 3 balles possèdent un défaut ? Arrondir le résultat à 0,000 1 et justifier la réponse.
   (d) Quelle est la moyenne de balles ayant un défaut dans cette situation ?
   (e) Déterminer le plus petit nombre k de balles pour que $P(X \leq k) \geq 0,99$?

Exercice 4. 1,5 points



On considère le parallélépipède ABCDEFGH

• Compléter par la lettre voulue

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{...G} + \overrightarrow{DA}$

• Déterminer le vecteur suivant, c'est-à-dire simplifiez l'expression afin d'obtenir un seul vecteur.

$\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} =$ ....