# DS 2 - mardi 30 novembre 2021 - sujet A

Durée : 2 heures

Nom : ............................................................... Prénom : ...............................................................

| TOTAL sur 20 | Exercice 1 | Exercice 2 | Exercice 3 | Exercice 4 |
|---|---|---|---|---|
| | / 4 | /5 | / 5 | / 6 |

**Exercice 1.** 4 points

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)$.
2. (a) Etablir, par un raisonnement par récurrence, l'inégalité suivante pour tout entier naturel $n$ : $u_n > n^2$.
   (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)$ .

**Correction**

1. Pour tout entier naturel $n$, on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n + 2n + 2) - u_n = 2n + 2 \geqslant 0$

   Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \geqslant u_n$

   Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$

2. (a) Considérons la propriété $P_n$ définie par : $P_n$ : $u_n > n^2$ pour tout entier naturel $n$

   Initialisation : On a les deux valeurs suivantes : $u_0 = 2$ et $0^2 = 0$ d'où $u_0 > 0^2$

   On vient de montrer que la propriété $P_0$ est vraie.

   Hérédité : Supposons la propriété $P_n$ réalisée pour un entier naturel $n$ quelconque, c'est à dire que $u_n > n^2$ et montrons que $P_{n+1}$ est vraie.

   On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 2 > \mathrm{n}^2 + 2\mathrm{n} + 2 > n^2 + 2n + 1 > (n+1)^2$

   D'où la propriété $P_{n+1}$ est vraie.

   Conclusion : On vient d'établir que la propriété $P_n$ est initialisée au rang $0$ et qu'elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $P_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$ alors $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n > n^2}$

   (b) On sait que la suite $(u_n)$ est croissante , d'après la question 1

   et que pour tout $n$ entier : $u_n > n^2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} n^2 = +\infty$

   D'après les théorèmes de divergence des suites monotones, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = +\infty}$

**Exercice 2.** 5 points

1. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur son ensemble de définition (sans justifier) :
   (a) sur $\mathbb{R}$, $m(x) = 3x^2 + 3x + 5$
   (b) sur $\mathbb{R}$, $n(x) = xe^{x^2+1}$
2. Soient deux fonctions définies sur $[0;7]$ par $f(x) = 2xe^{-x+3}$ et $g(x) = (-2x-2)e^{-x+3}$.
   (a) Montrer que $g$ est une primitive de $f$.
   (b) En déduire la primitive F de $f$ sur $[0;7]$ telque $F(1) = e^2$.
3. Déterminer l'ensemble des fonctions vérifiant l'équation différentielle : $y' - 2y = 4$ .

**Correction**

1. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur son ensemble de définition (sans justifier) :
   (a) sur $\mathbb{R}$, $m(x) = 3x^2 + 3x + 5$ alors $M(x) = 3 \times \frac{1}{3}x^3 + 3 \times \frac{1}{2}x^2 + 5 \times x = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5x$
   (b) sur $\mathbb{R}$, $n(x) = xe^{x^2+1}$ alors $N(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+1}$
2. Sur $[0;7]$ , on a $f(x) = 2xe^{-x+3}$ et $g(x) = (-2x-2)e^{-x+3}$.
   (a) On a $g(x) = (-2x-2)e^{-x+3}$
   Donc la fonction $g$ est dérivable sur $[0;7]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0;7]$ .
   Alors $g = uv$ et $g' = u'v + v'u$ avec $u(x) = -2x-2$ $u'(x) = -2$ et $v(x) = e^{-x+3}$ $v'(x) = -e^{-x+3}$
   D'où $g'(x) = -2e^{-x+3} + (-2x-2) \times (-e^{-x+3}) = (-2+2x+2)e^{-x+3} = f(x)$
   Donc $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est bien une primitive de } f}$
   (b) On sait que $g$ est une primitive de $f$
   Comme F est également une primitive de $f$ alors $F(x) = g(x) + k = (-2x-2)e^{-x+3} + k$
   De plus $F(1) = e^2 \iff (-2-2)e^{-1+3} + k = e^2 \iff -4e^2 + k = \frac{1}{e} \iff k = 5e^2$
   Donc $\boxed{F(x) = (-2x-2)e^{-x+3} + 5e^2}$
3. Déterimer l'ensemble des fonctions vérifiant l'équation différentielle : $y' - 2y = 4$ .
   - On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ ou $y' = 2y$
   D'après le cours, on sait que de la solution générale est de la forme $x \longmapsto Ke^{2x}$ avec $K \in \mathbb{R}$
   - Une fonction constante doit vérifier l'équation soit $0 - 2C = 4 \iff C = -\frac{4}{2} = -2$

   Donc les solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = 4$ sont les fonctions définies $\boxed{\text{sur } \mathbb{R} \text{ par } x \longmapsto Ke^{2x} - 2 \text{ avec } K \in \mathbb{R}}$.

**Exercice 3.** 5 points

Soit $f$ la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$.

1. Etudier les variations de la fonction $f$.
2. Déterminer le signe de $f$ sur $]-1;+\infty[$.
3. (a) En utilisant le signe de $f$, justifier que pour tout entier naturel $n$ non nul, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n$ non nul : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$.

**Correction**

1. On a $f(x) = x - \ln(1+x)$ sur $]-1;+\infty[$

   La fonction $f$ est donc définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ comme somme de fonctions définies et dérivables sur $]-1;+\infty[$

   Alors $f = u - \ln(v)$ d'où $f' = u' - \dfrac{v'}{v}$

   Avec $u(x) = x$ et $u'(x) = 1$ et $v(x) = 1+x$ et $v'(x) = 1$

   Donc $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$

   Sur $]-1;+\infty[$, $1+x > 0$ alors $f'(x)$ est du signe de $x$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variation de $f$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

   avec $f(0) = 0 - \ln(1+0) = \ln(1) = 0$

2. Comme $f$ admet un minimum de 0 en 0

   Alors $\boxed{\text{pour tout } x \in ]-1;+\infty[,\ f(x) \geq 0}$

3. (a) Comme sur $]-1;+\infty[$, $f(x) \geq 0$ equivaut à $x - \ln(1+x) \geq 0$ equivaut à $x \geq \ln(1+x)$

   En posant $x = \dfrac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on retrouve bien $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$ pour tout entier naturel $n$ non nul.

   (b) On vient de montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul,

   $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n} \iff n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < 1 \iff \ln\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right) < \ln(e) \iff \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$

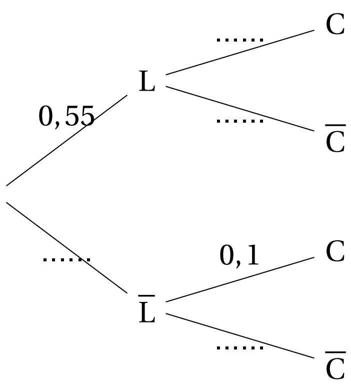
   Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e}$

**Exercice 4.** 6 points

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.
L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :

- $L$ : l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi ;
- $C$ : l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

1. Compléter l'arbre pondéré proposé ci-dessous :

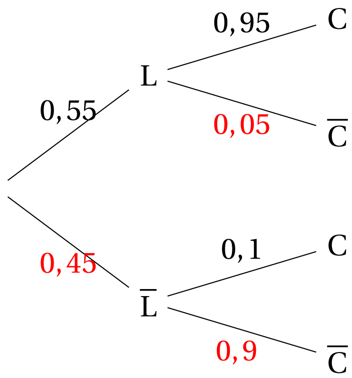



2. Calculer la probabilité qu'un élève choisi soit favorable à une pause plus longue et une répartition plus étalée.
3. Montrer que $P(C) = 0,5675$ et interpréter le resultat.
4. Calculer $P_C(L)$, en donner une valeur arrondie à $10^{-4}$, et donner une interprétation du résultat.
5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que $X$ suit une loi binomiale.
   (a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
   (b) Calculer la probabilité que deux des quatre élèves interrogés soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. *On donnera le résultat arrondi au millième.*
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins un élève soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. *On donnera le résultat arrondi au millième.*

## Correction

1. L'arbre est le suivant :

   - 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi d'où $\mathrm{P(L)} = 0,55$ et $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{L}})1 - 0,55 = 0,45$
   - Parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire d'où $\mathrm{P_L(C)} = 0,95$
   - Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10% sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire d'où $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{L}}}(\mathrm{C}) = 0,1$




2. On a $\mathrm{P(L \cap C)} = \mathrm{P(L)} \times \mathrm{P_L(C)} = 0,55 \times 0,95 = 0,5225$

   Donc la probabilité qu'un élève choisi soit favorable à une pause plus longue et une répartition plus étalée est de $\boxed{0,5225}$

3. La probabilité que l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée est $\mathrm{P(C)}$.

   D'après la formule des probabilités totales :

   $\mathrm{P(C)} = \mathrm{P(L \cap C)} + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{L}} \cap \mathrm{C}) = 0,5225 + \mathrm{P}\ (\overline{\mathrm{L}}) \times \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{L}}}(\mathrm{C}) = 0,5225 + 0,45 \times 0,1 = 0,5675$

   donc $\boxed{\text{la probabilité que l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée est de } 0,5675}$

4. On a $\mathrm{P_C(L)} = \dfrac{\mathrm{P(C\ \cap\ L)}}{\mathrm{P(C)}} = \dfrac{0,5225}{0,5675}$

   donc $\boxed{\mathrm{P_C(L)} \approx 0,9207}$.

   et la probabilité qu'un élève souhaite une pause repas plus longue sachant qu'il souhaite des cours plus étalée est $\boxed{\text{d'environ } 0,9207}$

5. (a) On sait que <u>$\mathrm{P(C)} = 0,5675$</u> et on choisit 4 élèves au <u>hasard</u> et de façon <u>indépendante</u>

   donc $\boxed{\mathrm{X} \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n = 4 \text{ et } p = 0,5675}$

   (b) La probabilité que deux des quatre élèves interrogés soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire est d'environ est $\mathrm{P(X = 2)}$.

   Pour une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(n, p)$ on sait que $\mathrm{P(X} = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, D'où $P(X=2) = \binom{4}{2} 0,5675^2 (1-0,5675)^{4-2} \approx 0,361$

Donc la probabilité que deux des quatre élèves interrogés soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire est $\boxed{\text{d'environ d'environ } 0,361}$

(c) La probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné est $P(X \geqslant 1)$.

Comme $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$.

Et $P(X=0) = \binom{4}{0} 0,5675^0 (1-0,5675)^{4-0} \approx 0,0350$

D'où $P(X \geqslant 1) \approx 0,965$

Donc la probabilité qu'au moins un élève soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire est $\boxed{\text{d'environ de } 0,965}$