DS 2 - mardi 30 novembre 2021 - sujet A

Durée : 2 heures

Nom : .... Prénom : ....

TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
	/ 4	/5	/ 5	/ 6

Exercice 1. 4 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2. (a) Etablir, par un raisonnement par récurrence, l'inégalité suivante pour tout entier naturel n : $u_n > n^2$.

   (b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2. 5 points

1. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur son ensemble de définition (sans justifier) :

   (a) sur $\mathbb{R}$, $m(x) = 3x^2 + 3x + 5$

   (b) sur $\mathbb{R}$, $n(x) = xe^{x^2+1}$
2. Soient deux fonctions définies sur $[0;7]$ par $f(x) = 2xe^{-x+3}$ et $g(x) = (-2x-2)e^{-x+3}$.

   (a) Montrer que g est une primitive de f.

   (b) En déduire la primitive F de f sur $[0;7]$ telque $\mathrm{F}(1) = e^2$.
3. Déterminer l'ensemble des fonctions vérifiant l'équation différentielle : $y' - 2y = 4$.

Exercice 3. 5 points

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer le signe de f sur $]-1;+\infty[$.
3. (a) En utilisant le signe de f, justifier que pour tout entier naturel n non nul , $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$.

Exercice 4. 6 points

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.

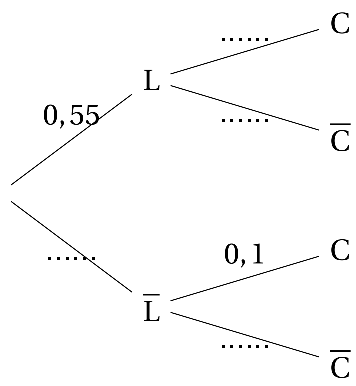
L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :

- L : l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi ;
- C : l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

1. Compléter l'arbre pondéré proposé ci-dessous :



2. Calculer la probabilité qu'un élève choisi soit favorable à une pause plus longue et une répartition plus étalée.
3. Montrer que $P(C) = 0,5675$ et interpréter le resultat.
4. Calculer $P_C(L)$, en donner une valeur arrondie à 10^{-4}, et donner une interprétation du résultat.
5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.
   (a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
   (b) Calculer la probabilité que deux des quatre élèves interrogés soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. *On donnera le résultat arrondi au millième.*
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins un élève soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. *On donnera le résultat arrondi au millième.*