DS 2 - mardi 30 novembre 2021

Durée : 2 heures

Nom : .... Prénom : ....

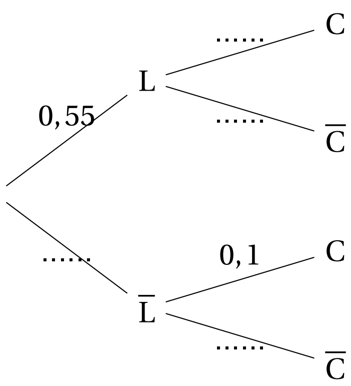
TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
	/ 6	/4	/ 5	/ 5

Exercice 1. 6 points

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.
L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :

- L : l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi ;
- C : l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

1. Compléter l'arbre pondéré proposé ci-dessous :

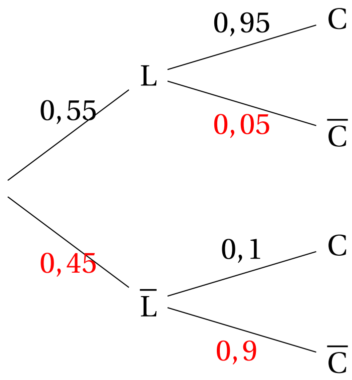


2. Calculer la probabilité qu'un élève choisi soit favorable à une pause plus longue et une répartition plus étalée.
3. Montrer que $P(C) = 0,5675$ et interpréter le resultat.
4. Calculer $P_C(L)$, en donner une valeur arrondie à 10^{-4}, et donner une interprétation du résultat.
5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.
   (a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
   (b) Calculer la probabilité que deux des quatre élèves interrogés soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. *On donnera le résultat arrondi au centième.*
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins un élève soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. *On donnera le résultat arrondi au centième.*

Correction

1. L'arbre est le suivant :

   - 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi d'où $P(L) = 0,55$ et $P(\overline{L})1 - 0,55 = 0,45$
   - Parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire d'où $P_L(C) = 0,95$
   - Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10% sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire d'où $P_{\overline{L}}(C) = 0,1$



2. On a $P(L \cap C) = P(L) \times P_L(C) = 0,55 \times 0,95 = 0,5225$

   Donc la probabilité qu'un élève choisi soit favorable à une pause plus longue et une répartition plus étalée est de $\boxed{0,5225}$

3. La probabilité que l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée est $P(C)$.

   D'après la formule des probabilités totales :

   $P(C) = P(L \cap C) + P(\overline{L} \cap C) = 0,5225 + P\ (\overline{L}) \times P_{\overline{L}}(C) = 0,5225 + 0,45 \times 0,1 = 0,5675$

   donc $\boxed{\text{la probabilité que l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée est de } 0,5675}$

4. On a $P_C(L) = \dfrac{P(C\ \cap\ L)}{P(C)} = \dfrac{0,5225}{0,5675}$

   donc $\boxed{P_C(L) \approx 0,9207}$.

   et la probabilité qu'un élève souhaite une pause repas plus longue sachant qu'il souhaite des cours plus étalée est $\boxed{\text{d'environ } 0,9207}$

5. (a) On sait que $\underline{P(C) = 0,5675}$ et on choisit 4 élèves au <u>hasard</u> et de façon <u>indépendante</u>

   donc $\boxed{\text{X suit la loi binomiale de paramètres } n = 4 \text{ et } p = 0,5675}$

   (b) La probabilité que deux des quatre élèves interrogés soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire est d'environ est $P(X = 2)$.

   Pour une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(n,p)$ on sait que $\quad P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, D'où $P(X=2) = \binom{4}{2} 0,5675^2 (1-0,5675)^{4-2} \approx 0,361$

Donc la probabilité que deux des quatre élèves interrogés soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire est $\boxed{\text{d'environ d'environ } 0,361}$

(c) La probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné est $P(X \geqslant 1)$.

Comme $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$.

Et $P(X=0) = \binom{4}{0} 0,5675^0 (1-0,5675)^{4-0} \approx 0{,}0350$

D'où $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}965$

Donc la probabilité qu'au moins un élève soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire est $\boxed{\text{d'environ de } 0,965}$

Exercice 2. 6 points

Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle, composée à 65 % d'hommes.
Des études préalables ont montré que 30 % des hommes contactés écoutent les explications, les autres raccrochant aussitôt (ou se déclarant immédiatement non intéressés). Parmi les femmes, 60 % écoutent les explications.
On admet que ces proportions restent stables.

Partie A

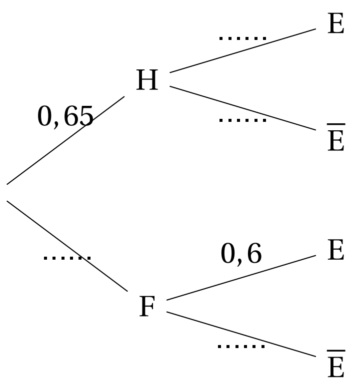
On choisit au hasard une personne dans le fichier clients. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie.
On note H l'évènement « la personne choisie est un homme »,

F l'évènement « la personne choisie est une femme »,

E l'évènement « la personne choisie écoute les explications du démarcheur » et

$\overline{\mathrm{E}}$ l'évènement contraire de E.

1. Compléter l'arbre de probabilité proposé ci-dessous :



2. (a) Calculer $p(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})$ et interpréter le résultat.
   (b) Montrer que la probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est égale à $0,405$.
   (c) Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ?
   On donnera le résultat arrondi au centième.

Partie B

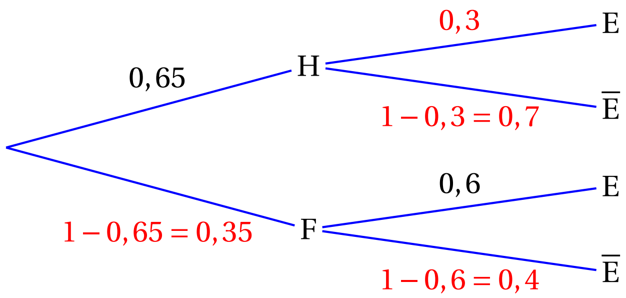
Les relevés réalisés au cours de ces premières journées permettent également de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait.
Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.
On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné. (*On arrondira le résultat au centième*).
3. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. *On donnera une valeur arrondie au dix millième.*

Correction - Baccalauréat ES/L Métropole - La Réunion - 13 septembre 2013

Partie A

1. L'arbre de probabilité correspondant aux données du problème est :



2. (a) L'événement $E \cap F$ est « la personne choisie écoute les explications du démarcheur et est une femme. ».

   D'après les propriétés de l'arbre pondéré :

   $P(E \cap F) = P(F \cap E) = P(F) \times P_F(E) = 0,35 \times 0,6 = 0,21$

   Donc $\boxed{P(E \cap F) = 0,21}$

   et $\boxed{\text{la probabilité que la personne choisie écoute le démarcheur et soit une femme est de } 0,21}$

   (b) La probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est $P(E)$.

   D'après la formule des probabilités totales puis que H et F forment une partition :

   $P(E) = P(H \cap E) + P(F \cap E) = P(H) \times P_H(E) + P(F) \times P_F(E)$

   $P(E) = 0,65 \times 0,3 + 0,35 \times 0,6 = 0,195 + 0,21 = 0,405$

   Donc $\boxed{\text{la probabilité que la personne choisie écoute le démarcheur est bien égale à } 0,405}$

   (c) Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute ; la probabilité que ce soit un homme est $P_E(H)$.

   $P_E(H) = \dfrac{P(E \cap H)}{P(E)} = \dfrac{0,65 \times 0,3}{0,405} \approx 0,48$

   Donc $\boxed{\text{la probabilité que le demarcheur s'adresse à un homme est de } 0,48}$

Partie B

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Les relevés réalisés au cours des premières journées permettent de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait, donc la probabilité qu'une personne interrogée souscrive un nouveau forfait est $0,12$.

   Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.

   On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.

   La variable aléatoire X qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné suit donc $\boxed{\text{la loi binomiale de paramètres } n = 60 \text{ et } p = 0,12}$

2. La probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions est $P(X = 5)$.

   Pour une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(n, p)$ on sait que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$,

   D'où $P(X = 5) = \binom{60}{5} 0,12^5 (1-0,12)^{60-5} \approx 0,120$

   Donc $\boxed{\text{la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné est d'environ } 0,12}$

3. La probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné est $P(X \geqslant 1)$.

   Comme $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$.

   Et $P(X = 0) = \binom{60}{0} 0,12^0 (1-0,12)^{60-0} \approx 0,0005$

   D'où $P(X \geqslant 1) \approx 0,9995$

   Donc $\boxed{\text{la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné est d'environ de } 0}$

Exercice 3. 4 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2. (a) Etablir, par un raisonnement par récurrence, l'inégalité suivante pour tout entier naturel n : $u_n > n^2$.

   (b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Correction

1. Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n + 2n + 2) - u_n = 2n + 2 \geqslant 0$

   Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \geqslant u_n$

   Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$
2. (a) Considérons la propriété P_n définie par : $\mathrm{P}_n : u_n > n^2$ pour tout entier naturel n

   Initialisation : On a les deux valeurs suivantes : $u_0 = 2$ et $0^2 = 0$ d'où $u_0 > 0^2$

   On vient de montrer que la propriété P_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons la propriété P_n réalisée pour un entier naturel n quelconque, c'est à dire que $u_n > n^2$ et montrons que P_{n+1} est vraie.

   On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 2 > \mathrm{n}^2 + 2\mathrm{n} + 2 > n^2 + 2n + 1 > (n+1)^2$

   D'où la propriété P_{n+1} est vraie.

   Conclusion : On vient d'établir que la propriété P_n est initialisée au rang 0 et qu'elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n alors $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n > n^2}$

   (b) On sait que la suite (u_n) est croissante , d'après la question 1

   et que pour tout n entier : $u_n > n^2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} n^2 = +\infty$

   D'après les théorèmes de divergence des suites monotones, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = +\infty}$

Exercice 4. 4 points

La suite (u_n) est définit par $u_0 = 13$ et pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Correction -

1. Considérons la propriété P_n définie par : $\mathrm{P}_n\ :\ u_n\ =\ 1\ + \frac{12}{5^n}$ pour tout entier naturel n

   Initialisation : On a les deux valeurs suivantes : $u_0 =\ 13$ et $1\ + \frac{12}{5^0}\ =\ 1\ + \frac{12}{1}\ = 13$

   On vient de montrer que la propriété P_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons la propriété P_n réalisée pour un entier naturel n quelconque, c'est à dire que $u_n\ =\ 1\ + \frac{12}{5^n}$ et montrons que P_{n+1} est vraie.

   On a $u_{n+1} = \frac{1}{5}\ u_n + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\ \left(1 + \frac{12}{5^n}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{12}{5 \times 5^n} + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} + \frac{12}{5^{n+1}} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$

   D'où la propriété P_{n+1} est vraie.

   Conclusion : On vient d'établir que la propriété P_n est initialisée au rang 0 et qu'elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n alors $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n\ =\ 1\ + \frac{12}{5^n}}$

2. On sait que $u_n\ =\ 1\ + \frac{12}{5^n} = 1 + 12 \times \frac{1}{5^n} == 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

   Comme $< \frac{1}{5} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n\ = 0$

   D'où $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n\ = 1$

   Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n\ = 1$

Exercice 5. 5 points

1. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur son ensemble de définition (sans justifier) :
   (a) sur $\mathbb{R}$, $m(x) = 3x^2 + 3x + 5$
   (b) sur $\mathbb{R}$, $n(x) = xe^{x^2+1}$
2. Soient deux fonctions définies sur $[0;7]$ par $f(x) = 2xe^{-x+3}$ et $g(x) = (-2x-2)e^{-x+3}$.
   (a) Montrer que g est une primitive de f.
   (b) En déduire la primitive F de f sur $[0;7]$ telque $\mathrm{F}(1) = e^2$.
3. Déterminer l'ensemble des fonctions vérifiant l'équation différentielle : $y' - 2y = 4$.

Correction

1. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur son ensemble de définition (sans justifier) :
   (a) sur $\mathbb{R}$, $m(x) = 3x^2 + 3x + 5$ alors $\mathrm{M}(x) = 3 \times \frac{1}{3}x^3 + 3 \times \frac{1}{2}x^2 + 5 \times x = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5x$
   (b) sur $\mathbb{R}$, $n(x) = x\ln(x^2+1)$ alors $\mathrm{N}(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$
2. Sur $[0;7]$, on a $f(x) = 2xe^{-x+3}$ et $g(x) = (-2x-2)e^{-x+3}$
   (a) On a $g(x) = (-2x-2)e^{-x+3}$

   Donc la fonction g est dérivable sur $[0;7]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0;7]$.

   Alors $g = uv$ et $g' = u'v + v'u$ avec $u(x) = -2x-2$ $u'(x) = -2$ et $v(x) = e^{-x+3}$ $v'(x) = -e^{-x+3}$

   D'où $g'(x) = -2e^{-x+3} + (-2x-2) \times (-e^{-x+3}) = (-2+2x+2)e^{-x+3} = f(x)$

   Donc $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est bien une primitive de } f}$

   (b) On sait que g est une primitive de f

   Comme F est également une primitive de f alors $\mathrm{F}(x) = g(x) + k = (-2x-2)e^{-x+3} + k$

   De plus $\mathrm{F}(1) = e^2 \iff (-2-2)e^{-1+3} + k = e^2 \iff -4e^2 + k = \frac{1}{e} \iff k = 5e^2$

   Donc $\boxed{\mathrm{F}(x) = (-2x-2)e^{-x+3} + 5e^2}$
3. Déterminer l'ensemble des fonctions vérifiant l'équation différentielle : $y' - 2y = 4$.

   - On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ ou $y' = 2y$

     D'après le cours, on sait que de la solution générale est de la forme $x \longmapsto \mathrm{K}e^{2x}$ avec $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$
   - Une fonction constante doit vérifier l'équation soit $0 - 2\mathrm{C} = 4 \iff \mathrm{C} = -\frac{4}{2} = -2$

   Donc les solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = 4$ sont les fonctions définies $\boxed{\text{sur } \mathbb{R} \text{ par } x \longmapsto \mathrm{K}\mathrm{e}^{2x} - 2 \text{ avec } \mathrm{K} \in \mathbb{R}}$.

Exercice 6. 5 points

1. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur son ensemble de définition (sans justifier) :
   (a) sur $\mathbb{R}$, $m(x) = 7x^2 + 2x - 5$
   (b) sur $\mathbb{R}$, $n(x) = (x+1)e^{x^2+2x}$
2. Soient deux fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{-1-\ln(x)}{x}$.
   (a) Montrer que g est une primitive de f.
   (b) En déduire la primitive F de f sur $]0;+\infty[$ telque $\mathrm{F}(e) = \dfrac{1}{e}$.
3. Déterminer l'ensemble des fonctions vérifiant l'équation différentielle : $y' + 2y = 4$.

Correction

1. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur son ensemble de définition (sans justifier) :
   (a) sur $\mathbb{R}$, $m(x) = 7x^2 + 3x + 5$ alors $\mathrm{M}(x) = 7 \times \dfrac{1}{3}x^3 + 2 \times \dfrac{1}{2}x^2 + 5 \times x = \dfrac{7}{3}x^3 + x^2 - 5x$
   (b) sur $\mathbb{R}$, $n(x) = (x+1)e^{x^2+2x}$ alors $\mathrm{N}(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2+2x}$
2. Sur $]0;+\infty[$, on a $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{-1-\ln(x)}{x}$
   (a) On a $g(x) = \dfrac{-1-\ln(x)}{x}$
   Donc la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.
   Alors $g = \dfrac{u}{v}$ et $g' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u(x) = -1-\ln(x)$ $u'(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $v(x) = x$ $v'(x) = 1$
   D'où $g'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{x} \times x - 1 \times (-1-\ln(x))}{x^2} = \dfrac{-1+1+\ln(x)}{x^2} = \dfrac{\ln(x)}{x^2} = f(x)$
   Donc $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est bien une primitive de } f}$
   (b) On sait que g est une primitive de f
   Comme F est également une primitive de f alors $\mathrm{F}(x) = g(x) + k = \dfrac{-1-\ln(x)}{x} + k$
   De plus $\mathrm{F}(e) = \dfrac{1}{e} \iff \dfrac{-1-\ln(e)}{e} + k = \dfrac{1}{e} \iff \dfrac{-2}{e} + k = \dfrac{1}{e} \iff k = \dfrac{3}{e}$
   Donc $\boxed{\mathrm{F}(x) = \dfrac{-1-\ln(x)}{x} + \dfrac{3}{e}}$
3. Déterminr l'ensemble des fonctions vérifiant l'équation différentielle : $y' + 2y = 4$.
   - On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ ou $y' = -2y$
   D'après le cours, on sait que de la solution générale est de la forme $x \longmapsto \mathrm{K}e^{-2x}$ avec $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$

- Une fonction constante doit vérifier l'équation soit $0+2\mathrm{C}=4 \iff \mathrm{C}=\dfrac{4}{2}=2$

  Donc les solutions de l'équation différentielle $y'+2y=4$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \mathrm{K}\,\mathrm{e}^{-2x}+2$ avec $\mathrm{K}\in\mathbb{R}$

Donc les solutions de l'équation différentielle $y'+2y=4$ sont les fonctions définies $\boxed{\text{sur } \mathbb{R} \text{ par } x \longmapsto \mathrm{K}\,\mathrm{e}^{-2x}+2 \text{ avec } \mathrm{K}\in\mathbb{R}}$.

Exercice 7. 5 points

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer le signe de f sur $]-1;+\infty[$.
3. (a) En utilisant le signe de f, justifier que pour tout entier naturel n non nul , $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$.

__Correction__

1. On a $f(x) = x - \ln(1+x)$ sur $]-1;+\infty[$

   La fonction f est donc définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ comme somme de fonctions définies et dérivables sur $]-1;+\infty[$

   Alors $f = u - \ln(v)$ d'où $f' = u' - \dfrac{v'}{v}$

   Avec $u(x) = x$ et $u'(x) = 1$ et $v(x) = 1+x$ et $v'(x) = 1$

   Donc $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$

   Sur $]-1;+\infty[$, $1+x > 0$ alors $f'(x)$ est du signe de x

x	-1		0		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

   avec $f(0) = 0 - \ln(1+0) = \ln(1) = 0$

2. Comme f admet un minimum de 0 en 0

   Alors $\boxed{\text{pour tout } x \in]-1;+\infty[,\ f(x) \geq 0}$

3. (a) Comme sur $]-1;+\infty[$, $f(x) \geq 0$ equivaut à $x - \ln(1+x) \geq 0$ equivaut à $x \geq \ln(1+x)$

   En posant $x = \dfrac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on retrouve bien $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$ pour tout entier naturel n non nul.

   (b) On vient de montrer que pour tout entier naturel n non nul ,

   $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n} \iff n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < 1 \iff \ln\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right) < \ln(e) \iff \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$

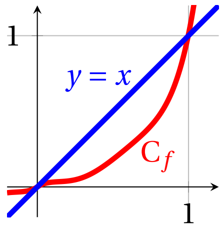
   Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e}$

Exercice 8. 5 points

On s'intéresse à des courbes permettant d'analyser la répartition de la masse salariale d'une entreprise.

Les fonctions f associées sont définies sur $[0;1]$ et doivent vérifier les conditions suivantes :

- $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$
- f est croissante sur $[0\,;1]$
- Pour tout x de l'intervalle $[0;1]$, $f(x) \leq x$



Justifiez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\ e^{x-1}$ vérifie les trois conditions.

<u>Correction</u>

On a $g(x) = x\ e^{x-1}$, la fonction g est bien définie sur $[0;1]$

- $g(0) = 0 \times e^{0-1} = 0$ et $g(1) = 1 \times e^{1-1} = 1$ $\boxed{g(0) = 0 \text{ et } g(1) = 1}$
- Étude des variations de la fonction g

  On a $g(x) = x\ e^{x-1}$

  Alors la fonction g est dérivable sur $[0\,;1]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0\,;1]$

  D'où $g = u \times v$ et $g' = u'v + v'u$ avec $u(x) = x$ et $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^{x-1}$ et $v'(x) = 1 \times e^{x-1} = e^{x-1}$

  Donc $g'(x) = 1 \times e^{x-1} + x \times e^{x-1} = (1+x)\ e^{x-1}$

  Comme sur $[0\,;1]$, $e^{x-1} > 0$ et $x + 1 > 0$ donc $g'(x) > 0$

  Donc $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est bien croissante sur } [0;1]}$
- Etude du signe de $g(x) - x$

  On a $g(x) - x = x\ e^{x-1} - x = x\ \left(e^{x-1} - 1\right)$

  Sur $[0\,;1]$ alors $x > 0$

  $$\text{Et } 0 \leq x \leq 1 \iff -1 \leq x - 1 \leq 1 - 1 \iff e^{-1} \leq e^{x-1} \leq e^{0}$$
  $$\iff e^{-1} - 1 \leq e^{x-1} - 1 \leq 1 - 1 \iff e^{x-1} - 1 \leq 0$$

  Alors sur $[0\,;1]$, on a $x\ \left(e^{x-1} - 1\right) \leq 0 \iff g(x) - x \leq 0 \iff g(x) \leq x$

  Donc $\boxed{\text{sur } [0\,;1]\text{, on a } g(x) \leq x}$

Les trois conditions sont bien vérifiées.