DS 2 - lundi 23 novembre

Durée : 2 heures

Nom : .... Prénom : ....

Exercice 1. 3,5 points

On considère la fonction f définie sur $[0~;~4[$ par : $f(x) = 10x + \ln(4-x) - \ln 4$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer $f(0)$.
2. (a) On appelle f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0~;~4[$.

   Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,4[$, on a : $f'(x) = \dfrac{39-10x}{4-x}$.

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0~;~4[$.

   (c) Justifier que la fonction f atteint un maximum en 3,9.

   Donner une valeur approchée au dixième de ce maximum.

Correction - tiré du baccalauréat STI2D Polynésie 19 juin 2019

On considère la fonction f définie sur $[0~;~4[$ par : $f(x) = 10x + \ln(4-x) - \ln 4$.

1. $f(0) = 10 \times 0 + \ln(4-0) - \ln 4 = 0$.
2. (a) f est dérivable sur $[0~;~4[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0~;~4[$

   Alors $f'(x) = 10 + \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{10(x-4)+1}{x-4} = \dfrac{10x-40+1}{x-4} = \dfrac{10x-39}{x-4}$.

   (b) On a $f'(x) = \dfrac{10x-39}{x-4}$.

   On en déduit par tableau de signes le signe de $f'(x)$:

x	0		3.9		4
$10x-39$		$-$	0	$+$	
$x-4$		$-$		$-$	$\|\|$
$\dfrac{10x-39}{x-4}$		$+$	0	$-$	$\|\|$

   (c) Du tableau précédent les variationss de la fonction f

x	0		3.9		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$
f		$\nearrow$	35.3	$\searrow$	$\|\|$

Donc f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 3{,}9]$, puis strictement décroissante sur $[3{,}9\ ;\ 4[$

f admet donc sur l'intervalle $[0\ ;\ 4[$ un maximum

$f(3{,}9) = 10 \times 3{,}9 + \ln(4 - 3{,}9) - \ln 4 \approx 35{,}31$, soit 35,3 au dixième près.

Exercice 2. 3,5 points

On sait que la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction numérique f définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$, passe par les points O$(0\,;\,0)$ et A$(-1\ ;\ 0)$, que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en O a pour coefficient directeur $\ln(2)$ et la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A a pour équation $y = x + 1$.

1. (a) À l'aide des données ci-dessus, donner la valeur de $f(0)$, de $f'(0)$, de $f(-1)$ et de $f'(-1)$.

   (b) Donner une équation de la tangente en O à $\mathscr{C}_f$.

2. On sait de plus qu'il existe des réels a, b et c tels que pour tout $x > -2$:

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\ln(x+2).$$

   (a) Exprimer $f(0)$ à l'aide de a, b et c.

   (b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de a, b et c

   (c) En déduire $f'(0)$ et $f'(-1)$ à l'aide de a, b et c.

   (d) En déduire les valeurs de a, b et c.

Correction

1. (a)
   - O$(0\,;\,0) \in \mathscr{C}_f$, donc $f(0) = 0$;
   - La tangente à $\mathscr{C}_f$ en O a pour coefficient directeur $\ln(2)$, donc le nombre dérivé $f'(0) = \ln 2$;
   - A$(-1\ ;\ 0) \in \mathscr{C}_f$, donc $f(-1) = 0$;
   - La tangente à $\mathscr{C}_f$ en A a pour équation $y = x + 1$, donc le nombre dérivé $f'(-1) = 1$.

   (b) Une équation de la tangente en O à $\mathscr{C}_f$ est

   $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, soit d'après les résultats précédents :

   $y - 0 = \ln 2(x - 0)$, soit $y = x\ln 2$.

2.
$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\ln(x+2).$$

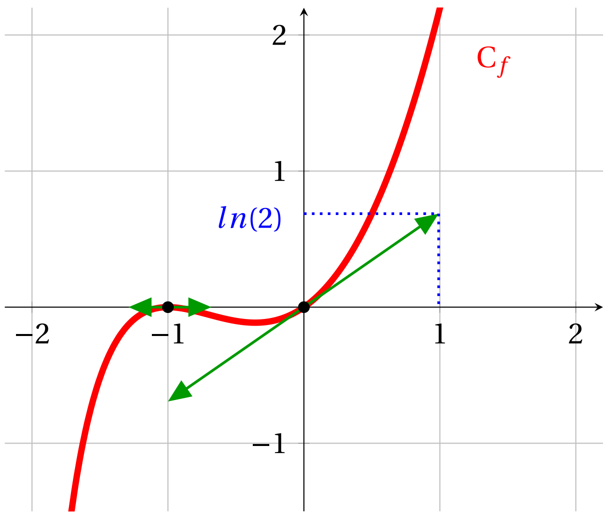
(a) On a donc $f(0) = c\ln 2$.

(b) La fonction f produit de fonctions dérivables sur $]-2\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x) = (2ax+b)\ln(x+2) + \left(ax^2+bx+c\right) \times \dfrac{1}{x+2}$.

(c) On a donc :
$f'(0) = b\ln 2 + \dfrac{c}{2}$;
$f'(-1) = (-2a+b)\ln 1 + \dfrac{a-b+c}{1} = a-b+c$.

(d) En utilisant les résultats de la question 1, on a donc :
$$\left\{\begin{array}{rcl} f'(0)=\ln 2 & = & b\ln 2 + \dfrac{c}{2} \\ f'(-1)=0 & = & a-b+c \\ f(0)=0 & = & c\ln 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \ln 2 & = & b\ln 2 \\ 0 & = & a-b \\ 0 & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & b \\ 0 & = & c \\ b & = & a \end{array}\right.$$
On a donc $f(x) = \left(x^2+x\right)\ln(x+2)$.

On peut vérifier ce résultat avec le tracé de la courbe représentative de f.



Exercice 3. Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $u(x) = 1 + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$
où b et c sont des réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$.

COURBE

On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points A$(1\,;\,0)$ et B$(4\,;\,0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
2. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x - 5\ln x - \dfrac{4}{x}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$.
2. En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Correction - Baccalauréat S Amérique du Sud 24 novembre 2015

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{(}i),\vec{(}j))$, on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $u(x) = 1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}$ où b et c sont des réels fixés.

1. La courbe $\mathscr{C}_u$ passe par le point A$(1;0)$ donc $u(1)=0$.

   La courbe $\mathscr{C}_u$ passe par le point B$(4;0)$ donc $u(4)=0$.
2. D'après la première question $u(1)=0$ ce qui équivaut à $1+\dfrac{b}{1}+\dfrac{c}{1^2}=0 \iff b+c=-1$.

   De même $u(4)=0$ équivaut à $1+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{4^2}=0 \iff 1+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{16}=0 \iff 4b+c=-16$.

   On résout le système $\left\{\begin{array}{rcl} b+c &=& -1 \\ 4b+c &=& -16 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} c &=& -1-b \\ 4b-1-b &=& -16 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} c &=& 4 \\ b &=& -5 \end{array}\right.$

   Donc pour tout x de $]0;+\infty[$, $u(x) = 1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x-5\ln x-\dfrac{4}{x}$.

1. La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et :
   $f'(x) = 1-5\times\dfrac{1}{x}-4\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2} = u(x)$

2. On a $u(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x-4)}{x^2}$

   on peut donc déterminer le signe de $u(x)$ sur $]0;+\infty[$ et donc le signe de $f'(x)$.

   $u(x)$ s'annule pour $x=1$ et $x=4$; $f(1)=-3$ et $f(4)=3-5\ln 4\approx -3,93$

   On dresse le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)=u(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	$\Vert$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$3-5\ln(4)$	$\nearrow$	

Exercice 4. 3,5 points

On sait que la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction numérique f définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$, passe par les points O$(0\,;\,0)$ et A$(-1\ ;\ 0)$, que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en O a pour coefficient directeur $\ln(2)$ et la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A a pour équation $y=x+1$.

1. (a) À l'aide des données ci-dessus, donner la valeur de $f(0)$, de $f'(0)$, de $f(-1)$ et de $f'(-1)$.

   (b) Donner une équation de la tangente en O à $\mathscr{C}_f$.

2. On sait de plus qu'il existe des réels $a,\ b$ et c tels que pour tout $x>-2$: $f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\ln(x+2)$.

   (a) Exprimer $f(0)$ à l'aide de a, b et c.

   (b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de a, b et c

   (c) En déduire $f'(0)$ et $f'(-1)$ à l'aide de a, b et c.

   (d) En déduire les valeurs de $a,\ b$ et c.

Correction - Baccalauréat ES Polynésie juin 2006

1. (a)
   - O$(0\,;\,0)\in\mathscr{C}_f$, donc $f(0)=0$;
   - La tangente à $\mathscr{C}_f$ en O a pour coefficient directeur $\ln(2)$, donc le nombre dérivé $f'(0)=\ln 2$;
   - A$(-1\ ;\ 0)\in\mathscr{C}_f$, donc $f(-1)=0$;
   - La tangente à $\mathscr{C}_f$ en A a pour équation $y=x+1$, donc le nombre dérivé $f'(-1)=1$.

(b) Une équation de la tangente en O à $\mathscr{C}_f$ est

$y - f(0) = f'(0)(x-0)$, soit d'après les résultats précédents :

$y - 0 = \ln 2(x-0)$, soit $y = x\ln 2$.

2.

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\ln(x+2).$$

(a) On a donc $f(0) = c\ln 2$.

(b) La fonction f produit de fonctions dérivables sur $]-2\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = (2ax+b)\ln(x+2) + \left(ax^2+bx+c\right) \times \dfrac{1}{x+2}$.

(c) On a donc :

$f'(0) = b\ln 2 + \dfrac{c}{2}$;

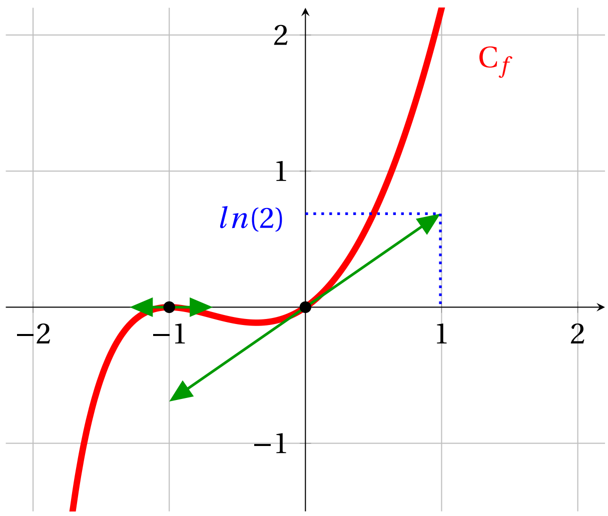
$f'(-1) = (-2a+b)\ln 1 + \dfrac{a-b+c}{1} = a-b+c$.

(d) En utilisant les résultats de la question 1, on a donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f'(0)=\ln 2 & = & b\ln 2 + \dfrac{c}{2} \\ f'(-1)=0 & = & a-b+c \\ f(0)=0 & = & c\ln 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \ln 2 & = & b\ln 2 \\ 0 & = & a-b \\ 0 & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & b \\ 0 & = & c \\ b & = & a \end{array}\right.$$

On a donc $f(x) = \left(x^2+x\right)\ln(x+2)$.

On peut vérifier ce résultat avec le tracé de la courbe représentative de f.



Exercice 5. 3,5 points

Dans une classe, on souhaite élire un comité, un petit groupe d'élèves auquel on confiera une mission particulière. On suppose que chaque élève de la classe peut-être élu.

- Combien de comités de 3 personnes peut-on élire dans une classe de 31 élèves ?
- il y a 351 façons d'élire un comité de 2 personnes. Quel est le nombre n d'élèves de cette classe ?

<u>Correction</u>

- Combien de comités de 3 personnes peut-on élire dans une classe de 31 élèves ? Il n'y a pas de distinction de rôle entre les membres du comité. Le problème revient donc à choisir trois éléments parmi 31.
  Il y a $\binom{3}{31} = 44495$ comités possibles.
- Le problème est ici l'inverse du précédent. Sur une classe de n personnes, il y a $\binom{2}{n}$ comités possibles de 2 personnes.
  On veut que $\binom{2}{n} = 351$
  Cela revient à résoudre l'équation $\dfrac{n(n-1)}{2} = 351$
  On trouve, calculs faits, $n = 27$
  Il y a donc 27 élèves dans cette classe.