DS 2 - lundi 23 novembre

Durée : 2 heures

Nom : .... Prénom : ....

TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Exercice 5
	/ 6	/5	/ 5	/ 3	/3

Exercice 1. 6 points

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 3\times 0,5^n \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. (a) A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

   (b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a $u_n \geqslant \dfrac{15}{4}\times 0,5^n$.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   (c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10\times 0,5^n$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

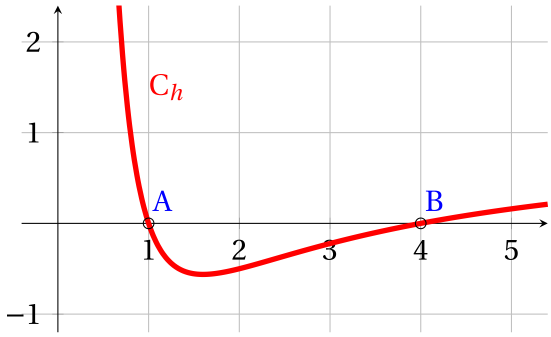
   (b) En déduire, que pour tout entier naturel n, $u_n = -8\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 10\times 0,5^n$.

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2. 5 points

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$
où b et c sont des réels fixés.



On précise que la courbe $\mathscr{C}_h$ passe par les points A$(1\,;\,0)$ et B$(4\,;\,0)$.

1. À l'aide des données ci-dessus, donner les valeurs de $h(1)$ et $h(4)$.
2. Exprimer $h(1)$ et $h(4)$ à l'aide de b et c, puis déterminer les valeurs de b et c.
3. En déduire, pour tout réel x strictement positif, $h(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x - 5\ln x - \dfrac{4}{x}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = h(x)$.
2. En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les valeurs particulières.

Exercice 3. 5 points

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 4[$ par : $f(x) = 10x + \ln(4-x) - \ln 4$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer $f(0)$.
2. (a) On appelle f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 4[$.

   Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,4[$, on a : $f'(x) = \dfrac{39-10x}{4-x}$.

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 4[$.

   (c) Justifier que la fonction f atteint un maximum en 3,9.

   Donner une valeur approchée au dixième de ce maximum.
3. Montrer qu'il existe un point de C_f en lequel la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation $y = 9x+1$?

Exercice 4. 3 points

Une société fabrique des yaourts aux fruits avec dix parfums différents. Le directeur des ventes propose de constituer des lots de quatre pots de parfums tous différents.

1. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon ?
2. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon sachant qu'ils ne doivent pas contenir simultanément un pot à la fraise et un à la framboise ?

Exercice 5. 3 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. On considère l'équation suivante : $ln(x^2) - ln\left(\frac{x^5}{e}\right) + ln(2) = ln(2x) + 5$

   AFFIRMATION 1 : $\frac{1}{e}$ est l'unique solution de cette équation.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3e^{-2x+1}$

   AFFIRMATION 2 : La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{F}(x) = -6e^{-2x+1} + 6$ est la primitive de f qui s'annule en $\frac{1}{2}$.

3. On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\frac{2}{u_n}$.

   AFFIRMATION 3 : Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.