DS 2 - lundi 23 novembre

Durée : 2 heures

Nom : .... Prénom : ....

TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Exercice 5
	/ 6	/5	/ 5	/ 3	/3

Exercice 1. 6 points

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. (a) A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

   (b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n$.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   (c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

   (b) En déduire, que pour tout entier naturel n, $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n$.

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Correction - Baccalauréat S Antilles-Guyane 19 juin 2014

1. (a) À l'aide d'une calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

   (b) Au vu du tableau précédent, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

2. (a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ ». Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

   - **Initialisation.** On a $u_1 = 3{,}4$ et $\frac{15}{4} \times 0{,}5 = 1{,}875$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   - **Hérédité.** Soit n entier naturel non nul, et $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire que :$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ on doit alors démontrer que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, càd que $u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$.
   On sait que

$$\begin{array}{rcll} u_n & \geqslant & \frac{15}{4} \times 0{,}5^n & \text{donc, en multipliant par } \frac{1}{5} : \\ \frac{1}{5} u_n & \geqslant & \frac{3}{4} \times 0{,}5^n & \text{puis, en ajoutant membre à membre } 3 \times 0{,}5^n : \\ \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n & \geqslant & \frac{3}{4} \times 0{,}5^n + 3 \times 0{,}5^n & \text{c'est-à-dire :} \\ u_{n+1} & \geqslant & \frac{15}{4} \times 0{,}5^n & \end{array}$$

   Or, pour tout entier naturel n, $0{,}5^n \geqslant 0{,}5^{n+1}$, on en déduit donc que : $u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$ et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est donc héréditaire.
   - **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}(n)$ est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.
   Donc $\boxed{\text{pour tout naturel non nul } u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n.}$

(b) Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{5}u_n+3\times 0{,}5^n-u_n \\ &= 3\times 0{,}5^n-\frac{4}{5}u_n \\ &= \frac{4}{5}\left(\frac{15}{4}\times 0{,}5^n-u_n\right) \end{aligned}$$

D'après la question 1a, pour tout naturel non nul $u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^n \iff 0 \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^n - u_n$

Alors cela entraîne que $\boxed{\text{pour tout } n \text{ entier, } u_{n+1}-u_n \leqslant 0.}$

(c) D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

D'après 2a, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^n > 0$, la suite est donc minorée.

On en déduit, d'après le théorème de convergence des suites monotones,

que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-10\times 0{,}5^{n+1} \\ &= \frac{1}{5}u_n+3\times 0{,}5^n-10\times 0{,}5\times 0{,}5^n \\ &= \frac{1}{5}u_n-2\times 0{,}5^n \\ &= \frac{1}{5}\left(u_n-10\times 0{,}5^n\right) \\ &= \frac{1}{5}v_n. \end{aligned}$$

Et $v_0 = u_0 - 10\times 0{,}5^0 = 2-10 = -8$

Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est donc géométrique de raison } \frac{1}{5} \text{ et de premier terme } -8}$

(b) La suite (v_n) étant géométrique, on a, pour tout entier naturel n : $v_n = -8\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

On en déduit que $-8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n = u_n - 10\times 0{,}5^n$

Donc $\boxed{u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0{,}5^n}$

(c) $-1 < \frac{1}{5} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$,

de même : $-1 < 0{,}5 < 1$,

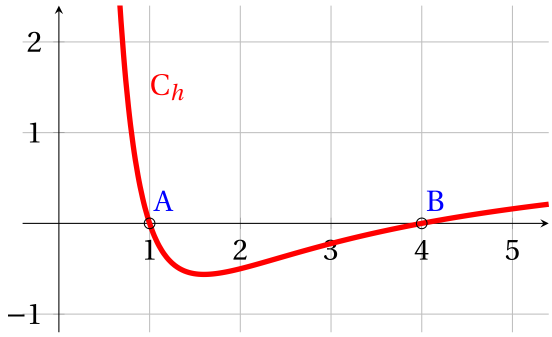
donc par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$.

On en déduit par opérations sur les limites que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Exercice 2. 5 points

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$
où b et c sont des réels fixés.



On précise que la courbe $\mathscr{C}_h$ passe par les points A$(1\,;\,0)$ et B$(4\,;\,0)$.

1. À l'aide des données ci-dessus, donner les valeurs de $h(1)$ et $h(4)$.
2. Exprimer $h(1)$ et $h(4)$ à l'aide de b et c, puis déterminer les valeurs de b et c.
3. En déduire, pour tout réel x strictement positif, $h(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x - 5\ln x - \dfrac{4}{x}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = h(x)$.
2. En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les valeurs particulières.

Correction - tiré du baccalauréat S Amérique du Sud 24 novembre 2015

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$ où b et c sont des réels fixés.

1. La courbe $\mathscr{C}_u$ passe par le point A$\,(1\,;0)$ donc $\boxed{h(1) = 0}$.

   La courbe $\mathscr{C}_u$ passe par le point B$\,(4\,;0)$ donc $\boxed{h(4) = 0}$.
2. D'après la première question $h(1) = 0$ ce qui équivaut à $1 + \dfrac{b}{1} + \dfrac{c}{1^2} = 0 \iff \boxed{\text{b+c = -1}}$.

   De même $h(4) = 0$ équivaut à $1 + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{4^2} = 0 \iff 1 + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{16} = 0 \iff \boxed{\text{4b+c = -16}}$.

On résout le système $\begin{cases} b+c = -1 \\ 4b+c = -16 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -1-b \\ 4b-1-b = -16 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 4 \\ b = -5 \end{cases}$ Donc $\boxed{b=-5 \text{ et } c=4}$

3. Alors pour tout x de $]0;+\infty[$, $h(x) = 1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2}$

   Donc $\boxed{\text{pour tout } x \text{ de }]0;+\infty[,\ h(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2}}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x - 5\ln x - \dfrac{4}{x}$.

1. La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et :

   $f'(x) = 1 - 5 \times \dfrac{1}{x} - 4 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{x^2} = h(x)$

   Donc $\boxed{\text{pour tout } x \text{ de }]0;+\infty[,\ f'(x) = h(x)}$

2. On a $f'(x) = h(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x-4)}{x^2}$

   on peut donc déterminer le signe de $h(x)$ sur $]0;+\infty[$ et donc le signe de $f'(x)$.

x	0		1		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2	‖	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{(x-1)(x-4)}{x^2}$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

   $h(x)$ s'annule pour $x=1$ et $x=4$; $f(1) = -3$ et $f(4) = 3 - 5\ln 4 = 3 - 10\ln 4 \approx -3,93$

   On dresse le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x) = h(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	‖	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$3-10\ln(2)$	$\nearrow$	

Exercice 3. 5 points

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 4[$ par : $f(x) = 10x + \ln(4-x) - \ln 4$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer $f(0)$.
2. (a) On appelle f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 4[$.

   Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 4[$, on a : $f'(x) = \dfrac{39-10x}{4-x}$.

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 4[$.

   (c) Justifier que la fonction f atteint un maximum en 3,9.

   Donner une valeur approchée au dixième de ce maximum.
3. Montrer qu'il existe un point de C_f en lequel la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation $y = 9x+1$?

Correction - tiré du baccalauréat STI2D Polynésie 19 juin 2019

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 4[$ par : $f(x) = 10x + \ln(4-x) - \ln 4$.

1. $f(0) = 10 \times 0 + \ln(4-0) - \ln 4 = 0$.
2. (a) f est dérivable sur $[0\ ;\ 4[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ 4[$

   Alors $f'(x) = 10 + \dfrac{1}{4-x} = \dfrac{10(4-x)+1}{4-x} = \dfrac{40-10x+1}{4-x} = \dfrac{39-10x}{4-x}$.

   (b) On a $f'(x) = \dfrac{39-10x}{4-x}$.

   On en déduit par tableau de signes le signe de $f'(x)$:

x	0		3.9		4
$39-10x$		$+$	0	$-$	
$4-x$		$+$		$+$	||
$\dfrac{39-10x}{4-x}$		$+$	0	$-$	||

   (c) Du tableau précédent les variationss de la fonction f

x	0		3.9		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||
f		$\nearrow$	35.3	$\searrow$	||

Donc f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 3{,}9]$, puis strictement décroissante sur $[3{,}9\ ;\ 4[$

f admet donc sur l'intervalle $[0\ ;\ 4[$ un maximum

$f(3{,}9) = 10 \times 3{,}9 + \ln(4-3{,}9) - \ln 4 \approx 35{,}31$, soit 35,3 au dixième près.

3. On doit chercher un point de C_f en lequel la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation $y = 9x + 1$

   cela revient à chercher $x \in]0;4[$ telque $f'(x) = 9$

   $$\begin{aligned} f'(x) = 9 \quad &\iff \quad \frac{39-10x}{4-x} = 9 \\ &\iff \quad 39 - 10x = 9(4-x) \\ &\iff \quad 39 - 10x = 36 - 9x \\ &\iff \quad 3 = x \end{aligned}$$

   L'abscisse du point chérché est 3, déterminons son ordonné

   $f(3) = 10 \times 3 + \ln(4-3) - \ln 4 = 30 + \ln(1) - \ln(4) = 30 - \ln(4) = 30 - 2\ln(2)$

   Donc $\boxed{\text{au point } \mathrm{A}(3;30-2\ln(2)), \text{ la courbe } \mathrm{C}_f \text{ admet une tangente parallèle à la droite } \Delta}$

Exercice 4. 3 points

Une société fabrique des yaourts aux fruits avec dix parfums différents. Le directeur des ventes propose de constituer des lots de quatre pots de parfums tous différents.

1. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon ?
2. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon sachant qu'ils ne doivent pas contenir simultanément un pot à la fraise et un à la framboise ?

Correction

1. Comme on doit faire un lot avec 4 yaourts avec des parfums tous différents, il y a 10 parfums possibles.

   Cela est équivalent à un tirage sans remise et sans ordre, il y a alors combinaison de 4 élèments parmi 10, donc $\binom{10}{4} = 210$

   D'où $\boxed{\text{il y a 210 lots différents possibles}}$

2. On veut donc faire des lots de 4 yaourts qu'ils ne doivent pas contenir simultanément un pot à la fraise et un àla framboise.

   méthode 1 : avec le complémentaire

   Il prendre l'ensemble des lots possibles auquel on soustrait le cas d'avoir à la fois fraise et frambroise.

   Pour avoir un lot avec à la fois fraise et frambroise : il faut 1 yaourt fraise, 1 yaourt framboise et 2 autres parfums parmi les 8 qui restent.

   Alors $\binom{8}{4} - \binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{8}{2} = 182$

   méthode 2 : au cas par cas

   voici les trois possibilités

   - 1 fraise et 3 autres parfums parmi les 8 qui restent
   - 1 framboise et 3 autres parfums parmi les 8 qui restent
   - 4 autres parfums parmi les 8 qui restent

   Cela donne $\binom{8}{4} + \binom{1}{1}\binom{8}{3} + \binom{1}{1}\binom{8}{3} = 182$

   Donc $\boxed{\text{il y a 182 lots différents possibles sans contenir simultanément un pot à la fraise et un à la framb}}$

Exercice 5. 3 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. On considère l'équation suivante : $ln(x^2) - ln\left(\frac{x^5}{e}\right) + ln(2) = ln(2x) + 5$

   AFFIRMATION 1 : $\frac{1}{e}$ est l'unique solution de cette équation.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3e^{-2x+1}$

   AFFIRMATION 2 : La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{F}(x) = -6e^{-2x+1} + 6$ est la primitive de f qui s'annule en $\frac{1}{2}$.

3. On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\frac{2}{u_n}$.
   AFFIRMATION 3 : Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

Correction

1. Pour tout réel x strictement positif :

$$\begin{aligned}
ln(x^2) - ln\left(\frac{x^5}{e}\right) + ln(2) = ln(2x) + 5 &\iff 2ln(x) - (5ln(x) - ln(e)) + ln(2) = ln(2) + ln(x) + 5 \\
&\iff 2ln(x) - 5ln(x) + 1 - ln(x) = 5 \\
&\iff -4ln(x) = 4 \\
&\iff ln(x) = -1 \\
&\iff x = e^{-1} \\
&\iff x = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{L'affirmation 1 est vraie}}$

2. La dérivée de la fonction F est la fonction F' définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}'(x) = -6 \times (-2)e^{-2x+1} = 12e^{-2x+1}$

   Pour tout x, on a $\mathrm{F}'(x) \neq f(x)$ donc la fonction F n'est pas une primitive de la fonction f.

   $\boxed{\text{L'affirmation 2 est fausse}}$

3. On a une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul
   et la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\frac{2}{u_n}$.
   AFFIRMATION 3 : Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

$$\begin{aligned}
(u_n) \text{ est minorée par } 2 &\implies \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ u_n > 2 \\
&\implies \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{u_n} < \frac{1}{2} \\
&\qquad \text{car la fonction inverse est décroissante sur }]0;+\infty[\\
&\implies \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ -\frac{2}{u_n} > -\frac{2}{2} \quad \text{car on multiplie par } -2 \\
&\implies \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ v_n > -1 \quad \text{car } v_n = -\frac{2}{u_n} \\
&\implies (v_n) \text{ est minorée par } -1.
\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{L'affirmation 3 est vraie}}$