DS 1 - lundi 7 octobre

Durée : 50 min

Nom : .... Prénom : ....

Exercice 1. 10 points

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$

et, pour tout entier naturel $n, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puis exprimer v_n en fonction de n.
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.
   (a) Calculer w_0.
   (b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
   (c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
   Que peut-on en déduire quant à la nature de la suite (w_n) ?
   (d) Exprimer w_n en fonction de n.
4. Déduire des questions $2c$ et $3d$ que, pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$
5. Pour tout entier naturel n, on pose : $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\mathrm{S}_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

Exercice 2. 2 points

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Exercice 3. 8 points

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{e^x}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + e^x$.
   (a) Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
   (b) En déduire le signe de $g(x)$.

2. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x} g(x)$.

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.