DS 1 - lundi 7 octobre

Durée : 50 min

Nom : .... Prénom : ....

Exercice 1. 7 points

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$

et, pour tout entier naturel $n, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puis exprimer v_n en fonction de n.
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.
   (a) Calculer w_0.
   (b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
   (c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$. Que peut-on en déduire quant à la nature de la suite (w_n) ?
   (d) Exprimer w_n en fonction de n.
4. Déduire des questions $2d$ et $3d$ que, pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$
5. Pour tout entier naturel n, on pose : $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\mathrm{S}_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

Correction

On sait que (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1. ∘ Déterminons u_2

   D'après la définition $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

   Donc $\boxed{u_2 = \frac{3}{4}.}$

   ∘ Nature de la suite (u_n)

   - Comme $\frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$ alors $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$

     Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique

   - Comme $u_1 - u_0 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$ et $u_2 - u_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ alors $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$

     Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique

   Donc : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est ni arithmétique ni géométrique.}}$

2. On a la suite (v_n) : pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

   (a) $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = 1$.

   Donc $\boxed{v_0 = 1.}$

   (b) Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n.

   On a pour tout naturel n,

   $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$.

   Donc $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n.}$

   (c) Comme $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

   On peut en déduire que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est une suite géométrique de premier terme } v_0 = 1}$ $\boxed{\text{et de raison } \frac{1}{2}.}$

   On a donc $\boxed{\text{quel que soit } n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.}$

Correction

3. On a la suite (w_n) : pour tout entier naturel n : $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

   (a) $w_0 = \dfrac{u_0}{v_0} = \dfrac{-1}{1} = -1$.
   Donc $\boxed{w_0 = -1.}$

   (b) On sait que pour tout n, $u_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2}u_n$ et $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

   Pour tout n, $w_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} == \dfrac{2v_n + u_n}{v_n} = 2 + \dfrac{u_n}{v_n}$

   Donc $\boxed{w_{n+1} = 2 + \dfrac{u_n}{v_n}}$

   (c) On sait que pour tout n, $\dfrac{u_n}{v_n} = w_n$ et $w_{n+1} = 2 + \dfrac{u_n}{v_n}$
   donc l'égalité ci-dessus s'écrit : $\boxed{w_{n+1} = 2 + w_n.}$

   (d) On sait que pour tout n, $w_{n+1} = 2 + w_n$
   On peut donc en déduire que $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est une suite arithmétique de premier terme}}$ $\boxed{w_0 = -1 \text{ et de raison } 2.}$
   Donc $\boxed{\text{pour tout } n,\ w_n = w_0 + n \times 2 = 2n - 1.}$

4. Montrons que pour tout entier naturel n $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.
   On a trouvé que $w_n = 2n - 1 = \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{u_n}{\frac{1}{2^n}} = 2^n \times u_n$.
   D'où $u_n = \dfrac{w_n}{2^n}$ car $2^n \neq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   Alors $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$
   Donc $\boxed{u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}}$

Correction

5. On a pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   Démontrons par récurrence la propriété : $\mathscr{P}_n : S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$

   - <u>Initialisation :</u> $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \dfrac{2\times 0+3}{2^0} = 2 - \dfrac{3}{1} = 2-3 = -1$.

     La formule est vraie au rang 0.

   - <u>Hérédité :</u> supposons qu'il existe un naturel n tel que : $\mathscr{P}_n$ est vraie

     $$S_k = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

     Montrons que la propriété : $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie

     On a $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$

     $$\begin{aligned} &= 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} \\ &= 2 + \frac{-4n-6+2n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 + \frac{-2n-5}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

     Donc $S_{n+1} = 2 - \dfrac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$.

     La formule est vraie au rang $n+1$.

   - <u>Conclusion :</u> Par initialisation au rang 0 et par héréditée, on a donc démontré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}.}$

Exercice 2. 3 points

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

Correction

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la prorpiété $\mathscr{P}_{n+1}$: $S_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

- Initialisation : Pour $n=1$, la somme S_1 vaut 1 et $1^2=1$ donc $S_1=1^2$
  la propriété est vraie pour le rang $n=1$.
- Hérédité : on suppose P_n vraie pour un n quelconque, donc $S_n=n^2$.
  Montrons que la propriété : $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie
  On a $S_{n+1}=S_n+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$

  Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie
- Conclusion : Par initialisation au rang 1 et par héréditée, on a donc démontré par récurrenceque la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
  Donc $\boxed{\text{tout } n \in \mathbb{N}^*\ 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2}$

Exercice 3. 10 points

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x$.
   (a) Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
   (b) En déduire le signe de $g(x)$.
2. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(x)$.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

Correction

1. On a g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^{x}$.

   g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont,

   et pour tout réel x : $g'(x) = -1 + e^{x}$.

   On a alors $g'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow x \geqslant 0$.

   Le tableau de variations de g est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de g		$\searrow$	2	$\nearrow$	

   On déduit du tableau précédent que, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ g(x) \geqslant 2 > 0.}$

2. On a la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$.

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont,

   Pour tout réel x, on a $f = u + \dfrac{v}{w}$ d'où $f = u' + \dfrac{v'w - w'v}{w^{2}}$

   avec $u(x) = x + 1$ $\quad u'(x) = 1$

   $v(x) = x$ $\quad v'(x) = 1$

   $w(x) = e^{x}$ $\quad w'(x) = e^{x}$

   D'où
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + \frac{1e^{x} - xe^{x}}{(e^{x})^{2}} \\
&= 1 + \frac{e^{x}(1-x)}{e^{x} \times e^{x}} \\
&= 1 + \frac{1-x}{e^{x}} \\
&= \frac{e^{x} + 1 - x}{e^{x}} \\
&= \frac{g(x)}{e^{x}} \\
&= e^{-x} g(x).
\end{aligned}
$$

   Donc $\boxed{\text{pour tout nombre réel } x : f'(x) = e^{-x} g(x).}$

Correction

3. On a démontré que pour tout nombre réel x : $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

   On a vu plus haut que, pour tout réel x, $g(x) > 0$,

   et comme par ailleurs $e^{-x} > 0$

   Donc on en déduit que $f'(x) > 0$.

   On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
Variation de f	$\nearrow$	

4. (a) L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

   Puisque $f'(x) = e^{-x}g(x)$, on obtient $f'(0) = 2$

   Puisque $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$, on obtient $f(0) = 1$

   Alors $T_0 : y = 2(x-0)+1$

   Donc $\boxed{T_0 : y = 2x+1}$

   (b) On pose pour tout réel x, $k(x) = f(x) - (2x+1)$,

   $$\text{Alors} \quad \begin{aligned} k(x) &= x+1+\frac{x}{e^x} - (2x+1) \\ &= \frac{x}{e^x} - x \\ &= \frac{x}{e^x}\left(1-e^x\right) \end{aligned}$$

   Dressons alors un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$1-e^x$		$+$	0	$-$	
$k(x)$		$-$	0	$-$	

   On en déduit que $\boxed{\mathscr{C} \text{ est située en dessous de T.}}$