DS 1 - mardi 11 octobre 2022 - sujet B

Durée : 1h50 Calculatrice est autorisée

Nom : .... Prénom : ....

TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 2	Exercice 4
	/ 4	/3	/5	/ 8

Exercice 1. 4 points

Dans cet exercice, les résultats seront si nécessaire, arrondis au dix millième près.

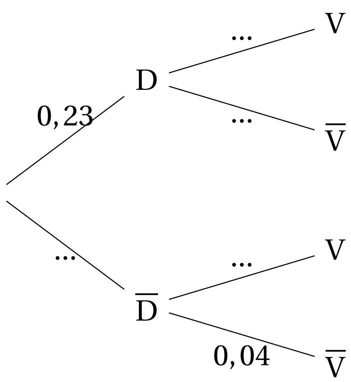
Un fabriquant de batteries a constaté à l'issue de la fabrication, que ces batteries peuvent avoir un défaut de sulfatation. On admet que dans cette production, 23 % des batteries présentent ce défaut.

L'entreprise décide de mettre en place un test de contrôle de qualité de ces batteries avant leur mise en vente. Ce contrôle détecte et élimine 90 % des batteries défectueuses, mais il élimine également à tort 4 % des batteries non défectueuses. Les batteries non éliminées sont alors mises en vente.

On prélève une batterie au hasard dans cette production et on note :

- D l'évènement « la batterie est défectueuse » ;
- V l'évènement « la batterie est mise en vente ».

1. Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :



2. Calculer la probabilité que la batterie soit défectueuse et mise en vente.
3. Montrer que la probabilité qu'une batterie soit mise en vente est égale à 0,7622.
4. Quelle est la probabilité qu'une batterie mise en vente soit défectueuse ?

Exercice 2. 3 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\dfrac{e^{3x^2}}{e^{4x-1}} = e^5$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x+3} \times e^{2-5x} \geq 1$

Exercice 3. 5 points

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-2x+6}$.

1. Monter que $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$. *On ne demande pas de calculer les ordonnées.*
3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}_3$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

Exercice 4. 8 points

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1000$.

1. Calculer u_1 et u_2. En déduire que (u_n) n'est ni arithémtique ni géométrique.
2. La fonction Python nommée `suite` est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par `suite(10)`.

```
def suite(n) :
    u=1000
    for i in range(n) :
        u=0.9*u+250
    return u
```

3. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1} \leq 2500$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1500$.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que : $u_n = -1500 \times 0{,}9^n + 2500$.
5. Déterminer une méthode permettant de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2200. Il pourra s'agir d'un programme. Déterminer cette année.