DS 1 - mardi 11 octobre 2022 - sujet A et B

Durée : 1h50 Calculatrice est autorisée

Nom : .... Prénom : ....

TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
	/ 4	/3	/5	/ 8

Exercice 1. 4 points

Dans cet exercice, les résultats seront si nécessaire, arrondis au millième près.

Des batteries des smartphones produits par un fabricant proviennent de deux fournisseurs notés A et B.

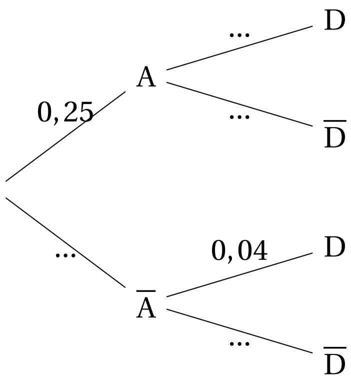
2 % des batteries qui proviennent du fournisseur A sont défectueuses et 4 % des batteries qui proviennent du fournisseur B sont défectueuses.

Pour des raisons de prix, 25 % des batteries utilisées pour la production des smartphones proviennent du fournisseur A.

On choisit au hasard une batterie dans l'ensemble des batteries. On considère les événements suivants :

- A l'évènement « la batterie provient du fournisseur A » ;
- D l'évènement « la batterie est défectueuse ».

1. Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :



- 25 % des batteries utilisées pour la production des smartphones proviennent du fournisseur A

  d'où $p(A) = 0,25$ et $p(\overline{A}) = 1 - 0,25 = 0,75$

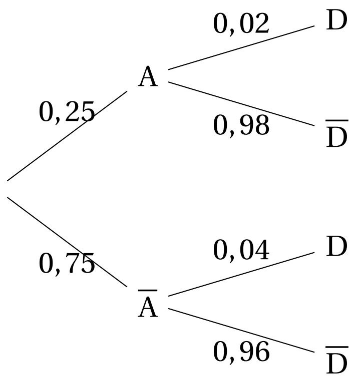
- 2 % des batteries qui proviennent du fournisseur A sont défectueuses

  d'où $p_A(D) = 0,02$ et $p_{\overline{A}}(\overline{D}) = 1 - 0,02 = 0,98$

- 4 % des batteries qui proviennent du fournisseur B sont défectueuses

  d'où $p_{\overline{A}}(D) = 0,04$ et $p_{\overline{A}}(\overline{D}) = 1 - 0,04 = 0,96$

D'où l'arbre pondéré rendant compte de cette situation :



2. Calculer la probabilité que la batterie n'ait pas de défaut et provienne du fournisseur B.

On sait que $P(\overline{D} \cap \overline{A}) = p_{\overline{A}}(D) \times p(\overline{A})$

Soit $p(\overline{D} \cap \overline{A}) = 0,96 \times 0,75 = 0,72$

Donc $\boxed{\text{la probabilité qu'une batterie n'ait pas de défaut et provienne du fournisseur B est égale à } 0,72}$

3. Montrer que la probabilité qu'une batterie n'a pas de défaut est égale à $0,965$.

Les évènements A et D sont relatifs à la même épreuve, ils forment une partition

D'après la formule des probabilités totales : $p(\overline{D}) = p(\overline{D} \cap A) + p(\overline{D} \cap \overline{A})$

Comme $p(\overline{D} \cap A) = p_A(\overline{D}) \times p(A)$

Alors $p(\overline{D} \cap A) = 0,98 \times 0,25 = 0,245$

D'où $p(\overline{D}) = 0,245 + 0,72 = 0,965$

Donc $\boxed{\text{la probabilité qu'une batterie n'a pas de défaut est égale à } 0,965}$

4. Quelle est la probabilité qu'une batterie défectueuse provienne du fournisseur B ?

Il s'agit, de calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement $\overline{A}$ sachant que l'évènement D est réalisé : $p_D(\overline{A})$

Alors $p_D(\overline{A}) = \dfrac{p\left(D \cap \overline{A}\right)}{p(D)} = \dfrac{p_{\overline{A}}(D) \times p(\overline{A})}{1 - p\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0,04 \times 0,75}{1 - 0,965} = \dfrac{0,03}{0,035} \approx 0,857$

Donc $\boxed{\text{arrondie au millième près, la probabilité qu'une batterie défectueuse provienne du fournisseur B}}$

$\boxed{\text{est } 0,857}$

Exercice 2. 4 points

Dans cet exercice, les résultats seront si nécessaire, arrondis au dix millième près.

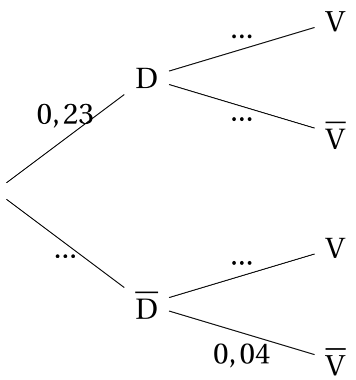
Un fabriquant de batteries a constaté à l'issue de la fabrication, que ces batteries peuvent avoir un défaut de sulfatation. On admet que dans cette production, 23 % des batteries présentent ce défaut.

L'entreprise décide de mettre en place un test de contrôle de qualité de ces batteries avant leur mise en vente. Ce contrôle détecte et élimine 90 % des batteries défectueuses, mais il élimine également à tort 4 % des batteries non défectueuses. Les batteries non éliminées sont alors mises en vente.

On prélève une batterie au hasard dans cette production et on note :

- D l'évènement « la batterie est défectueuse » ;
- V l'évènement « la batterie est mise en vente ».

1. Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :



- 23 % des batteries sont défectueuses

  d'où $p(\text{D}) = 0,23$ et $p(\overline{\text{D}}) = 1 - 0,23 = 0,77$

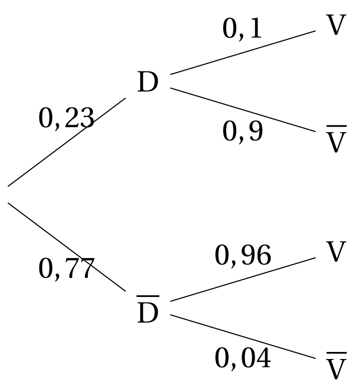
- Le contrôle détecte et élimine 90 % des batteries défectueuses

  d'où $p_{\text{D}}(\overline{\text{V}}) = 0,9$ et $p_{\text{D}}(\text{V}) = 1 - 0,9 = 0,1$

- Le contrôle détecte et élimine à tort 4 % des batteries non défectueuses

  d'où $p_{\overline{\text{D}}}(\text{V}) = 0,04$ et $p_{\overline{\text{D}}}(\text{V}) = 1 - 0,04 = 0,96$

D'où l'arbre pondéré rendant compte de cette situation :



2. Calculer la probabilité que la batterie soit défectueuse et mise en vente.

> On sait que $p(\mathrm{V} \cap \mathrm{D}) = p_{\mathrm{D}}(\mathrm{V}) \times p(\mathrm{D})$
>
> Soit $p(\mathrm{V} \cap \mathrm{D}) = 0,23 \times 0,1 = 0,023$
>
> Donc $\boxed{\text{la probabilité qu'une batterie soit défectueuse et mise en vente est égale à 0,023}}$

3. Montrer que la probabilité qu'une batterie soit mise en vente est égale à 0,7622.

> Les évènements D et V sont relatifs à la même épreuve,ils forment une partition
>
> Alors d'après la formule des probabilités totales : $p(\mathrm{V}) = p(\mathrm{V} \cap \mathrm{D}) + p(\mathrm{V} \cap \overline{\mathrm{D}})$
>
> Or $p(\mathrm{V} \cap \overline{\mathrm{D}}) = p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{V}) \times p(\overline{\mathrm{D}})$
>
> Soit $p(\mathrm{V} \cap \overline{\mathrm{D}}) = 0,77 \times 0,96 = 0,7392$
>
> D'où $p(\mathrm{V}) = p(\mathrm{V} \cap \mathrm{D}) + p(\mathrm{V} \cap \overline{\mathrm{D}}) = 0,023 + 0,7392 = 0,7622$
>
> Donc $\boxed{\text{la probabilité qu'une batterie soit mise en vente est égale à 0,7622}}$

4. Quelle est la probabilité qu'une batterie mise en vente soit défectueuse ?

> Il s'agit, de calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement D sachant que l'évènement V est réalisé. $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{D}) = \dfrac{p(\mathrm{V} \cap \mathrm{D})}{p(\mathrm{V})}$
>
> Soit $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{D}) = \dfrac{0,023}{0,7622} \approx 0,0302$
>
> Donc $\boxed{\text{arrondie au dix millième près, la probabilité qu'une batterie mise en vente soit défectueuse}}$
>
> $\boxed{\text{est 0,0302}}$

Exercice 3. 3 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\dfrac{e^{2x^2}}{e^{1-x}} = e^2$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{3x-2} \times e^{1-5x} \leq 1$

<u>Correction</u>

> 1. On doit résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\dfrac{e^{2x^2}}{e^{1-x}} = e^2$
>
> Pour tout réel x : $\dfrac{e^{2x^2}}{e^{1-x}} = e^2 \iff e^{2x^2-(1-x)} = e^2$
>
> $\iff e^{2x^2-1+x} = e^2$
>
> $\iff 2x^2 + x - 1 = 2$

$$\iff \quad 2x^2 + x - 1 - 2 = 0$$

$$\iff \quad 2x^2 + x - 3 = 0$$

Le discriminant du trinôme $2x^2 + x - 3 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 1 + 24 = 25$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{25}}{2\times 2} = \dfrac{-1-5}{4} = \dfrac{-6}{4} = \dfrac{-3}{2}$
et
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{25}}{2\times 2} = \dfrac{-1+5}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

Donc $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{3}{2};1\right\}}$

2. On doit résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{3x-2} \times e^{1-5x} \leq 1$

Pour tout réel x : $e^{3x-2} \times e^{1-5x} \leq 1 \iff e^{3x-2+(1-5x)} \leq 1$

$$\iff e^{3x-5x-2+1} \leq e^0$$

$$\iff -2x - 1 \leq 0$$

$$\iff -1 \leq 2x$$

$$\iff \frac{-1}{2} \leq x$$

Donc $\boxed{\mathscr{S} = \left[\dfrac{-1}{2};+\infty\right[}$

Exercice 4. 3 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\dfrac{e^{3x^2}}{e^{4x-1}} = e^5$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x+3} \times e^{2-5x} \geq 1$

<u>Correction</u>

1. On doit résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\dfrac{e^{3x^2}}{e^{4x-1}} = e^5$

Pour tout réel x : $\dfrac{e^{3x^2}}{e^{4x-1}} = e^5 \iff e^{(3x^2-(4x-1))} = e^5$

$$\iff e^{3x^2-4x+1} = e^5$$

$$\iff 3x^2 - 4x + 1 = 5$$

$$\iff 3x^2 - 4x + 1 - 5 = 0$$

$$\iff \quad 3x^2-4x-4=0$$

Le discriminant du trinôme $3x^2-4x-4=0$: $\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\times 3\times(-4) = 16+48 = 64$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-\sqrt{64}}{2\times 3} = \dfrac{4-8}{6} = \dfrac{-4}{6} = \dfrac{-2}{3}$
et
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+\sqrt{64}}{2\times 3} = \dfrac{4+8}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$

Donc $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{2}{3};2\right\}}$

2. On doit résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x+3}\times e^{2-5x}\geq 1$

Pour tout réel x : $e^{2x+3}\times e^{2-5x}\geq 1 \iff e^{2x+3+2-5x}\geq 1$

$$\iff e^{-3x+5}\geq e^0$$
$$\iff -3x+5\geq 0$$
$$\iff 5\geq 3x$$
$$\iff \frac{5}{3}\geq x$$

Donc $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty;\dfrac{5}{3}\right]}$

Exercice 5. 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par la relation : $f(x) = \dfrac{e^{1-2x}}{x}$.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{(-1-2x)e^{1-2x}}{x^2}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}^*$. *On ne demande pas de calculer les ordonnées.*
3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}_1$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Correction

1. On sait que $f(x) = \dfrac{e^{1-2x}}{x}$

Alors la fonction f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables.

On a $f = \dfrac{u}{v}$ et $f' = \dfrac{uv'-v'u}{v^2}$ avec $\begin{cases} u(x) = e^{1-2x} \quad \text{et} \quad u'(x) = -2e^{1-2x} \\ v(x) = x \quad \text{et} \quad v'(x) = 1 \end{cases}$

Alors $f'(x) = \dfrac{-2e^{1-2x}\times x - 1\times e^{1-2x}}{x^2}$

$$= \frac{(-2x-1)e^{1-2x}}{x^2}$$

Donc $\boxed{f'(x) = \frac{(-2x-1)e^{1-2x}}{x^2}}$

2. On sait que pour étudier les variations de la fonction f, il faut étudier le signe de la dérivée $f'(x)$
   On a $f'(x) = \frac{(-2x-1)e^{1-2x}}{x^2}$
   Or la fonction exponentielle étant strictement positive, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ le signe de ($e^{1-2x} > 0$ et $x^2 \geq 0$

   D'où $f'(x)$ dépend du signe de et $-2x-1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$-2x-1$		$+$	0	$-$	||	$-$	
e^{1-2x}		$+$		$+$	||	$+$	
x^2		$+$		$+$	||	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	

   On en déduit donc le tableau de variations

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
Variation de f		$\nearrow$		$\searrow$	||	$\searrow$	

3. On cherche $\mathscr{T}_\infty$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

   On a $\mathscr{T}_\infty$: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$
   avec $f'(1) = \frac{(-2-1)e^{1-2}}{1^2} = -3e^{-1}$
   et $f(1) = \frac{e^{1-2}}{1} = e^{-1}$
   Alors $\mathscr{T}_\infty$: $y = -3e^{-1}(x-1) + e^{-1}$

   $$y = -3e^{-1}x + 3e^{-1} + e^{-1}$$

   Donc $\boxed{\mathscr{T}_{\ni} : y = -3e^{-1}x + 4e^{-1}}$

Exercice 6. 5 points

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-2x+6}$.

1. Monter que $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2. Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$. *On ne demande pas de calculer les ordonnées.*

3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}_3$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

Correction

1. On sait que $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-2x+6}$

   Alors la fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables.

   On a $f = u \times v$ et $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 - 2x + 1 \quad \text{et} \quad u'(x) = 2x - 2x \\ v(x) = e^{-2x+6} \quad \text{et} \quad v'(x) = -2e^{-2x+6} \end{cases}$

   Alors $f'(x) = (2x-2)e^{-2x+6} + (x^2 - 2x + 1) \times (-2e^{-2x+6})$

   $= (2x - 2 - 2(x^2 - 2x + 1)e^{-2x+6}$

   $= (2x - 2 - 2x^2 + 4x - 2)e^{-2x+6}$

   $= (-2x^2 + 6x - 4) \times e^{-2x+6}$

   Donc $\boxed{f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}}$

2. On sait que pour étudier les variations de la fonction f, il faut étudier le signe de la dérivée $f'(x)$

   On a $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}$

   Or la fonction exponentielle étant strictement positive, on en déduit que le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de son facteur $-2x^2 + 6x - 4$.

   Ce polynôme du second degré $\left(-2x^2 + 6x - 4\right)$ admet pour discriminant :

   $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = 36 - 32 = 4$

   Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6 - \sqrt{4}}{-2 \times 2} = \dfrac{-6 - 2}{-2 \times 2} = \dfrac{-8}{-4} = 2$

   et

   $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6 + \sqrt{4}}{-2 \times 2} = \dfrac{-6 + 2}{-2 \times 2} = \dfrac{-4}{-4} = 1$

   Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le signe de ce polynôme sur $\mathbb{R}$ et de la dérivée f'

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-2x^2 + 6x - 4$		$-$	0	$+$	0	$-$	
e^{-2x+6}		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit donc le tableau de variations

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

3. On cherche $\mathscr{T}_3$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

   On a $\mathscr{T}_3 \, : \, y = f'(3)(x-3) + f(3)$

   avec $f'(3) = (-2 \times 3^2 + 6 \times 3 - 4)e^{-2\times 3+6} = (-2 \times 9 + 18 - 4)e^0 = -4$

   et $f(3) = (3^2 - 2 \times 3 + 1)e^{-2\times 3+6} = (9-6+1)e^0 = 4$

   Alors $\mathscr{T}_\ni \, : \, y = -4(x-3)+4$

   $y = -4x + 12 + 4$

   Donc $\boxed{\mathscr{T}_3 \, : \, y = -4x + 16}$

Exercice 7. 8 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\ 000$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 200$.

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9415$. En déduire que (u_n) n'est ni arithémtique ni géométrique.
2. La fonction Python nommée `suite` est définie ci-dessous. Que représente la valeur renvoyée par `suite(8)` ?

```
def suite(n) :
    u=10000
    for i in range(n) :
        u=0.95*u+200
    return u
```

3. (a) Démontrer à l'aide d'un raisonemment par récurrence, que

   pour tout entier naturel n : $u_n > u_{n+1} > 4\ 000$

   (b) En déduire que la suite (u_n) converge.

4. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 4\ 000$.

   (a) Calculer v_0.

   (b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

   (c) En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = 4\ 000 + 6\ 000 \times 0{,}95^n$

5. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

   Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021. Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « Malheuresement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

   Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

   Vous décrirez votre démarche. Si vous utilisez un programme, vous devrez l'écrire sur la copie.

Correction

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\ 000$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,95u_n + 200$.

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9415$. En déduire que (u_n) n'est ni arithémtique ni géométrique.

   $u_1 = 0,95u_0 + 200 = 9500 + 200 = 9700$ et $u_2 = 0,95u_1 + 200 = 9415$.

   Comme $u_2 - u_1 = -285 \neq u_1 - u_0 = -300$, on en déduit que (u_n) n'est pas artihmétique.

   Coomme $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$, on en déduit que (u_n) n'est pas géométrique.

2. La fonction Python nommée `suite` est définie ci-dessous. Que représente la valeur renvoyée par `suite(8)` ?

```
def suite(n) :
    u=10000
    for i in range(n) :
        u=0.95*u+200
    return u
```

   $\boxed{\text{la valeur renvoyée représente le terme de la suite } u_8}$

3. (a) Démontrer à l'aide d'un raisonemment par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n > u_{n+1} > 4\ 000$

   Soit pour tout entier naturel n , la propriété $\mathscr{P}_n$: $u_n > u_{n+1} > 4\ 000$

   - *Initialisation.* $u_0 > u_1 > 4000$ d'après la question 1, d'où $\mathscr{P}_1$.
   - *Hérédité.* Soit k un nombre entier naturel. On note suppose $\mathscr{P}_k$.

     On a donc $u_k > u_{k+1} > 4\ 000$, puis comme $0,95 > 0$, on a $0,95u_k > 0,9u_{k+1} > 0,95 \times 4000$.

     Enfin on obtient $0,95u_k + 200 > 0,9u_{k+1} + 200 > 0,95 \times 4000 + 200$.

     Autrement dit $u_{k+1} > u_{k+2} > 4000$ qui n'est autre que $\mathscr{P}_{k+1}$.

     Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_k$ implique $\mathscr{P}_{k+1}$.

- *Conclusion.* Par initialisation et hérédité, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie

  Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : \ u_n > u_{n+1} > 4\ 000}$

(b) En déduire que la suite (u_n) converge.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) est décroissante.

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4000$.

(u_n) étant décroissante et majorée par 4000, d'après le théorème de convergence

on en déduit $\boxed{\text{qu'elle converge vers un nombre inférieur ou égal à 4000}}$

4. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 4\ 000$.

(a) Calculer v_0.

$v_0 = u_0 - 4000 = 10000 - 4000 = 6000$.

(b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

Soit n un entier naturel.

On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 4000 = 0,95u_n + 200 - 4000 = 0,95(v_n + 4000) - 3800 = 0,95v_n$

Ainsi pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0,95v_n$.

On en déduit que $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } 0,95}$

(c) En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = 4\ 000 + 6\ 000 \times 0,95^n$

Comme (v_n) est géométrique de raison $0,95$ et que $v_0 = 6000$, on a $v_n = 6000 \times 0,95^n$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4000 + v_n = 4\ 000 + 6\ 000 \times 0,95^n$

Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 4\ 000 + 6\ 000 \times 0,95^n}$

5. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021. Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « Malheuresement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

Vous décrirez votre démarche. Si vous utilisez un programme, vous devrez l'écrire sur la copie.

La suite (u_n) définie précédemment sert à modéliser le nombre d'individus, plus précisément, u_n donne une valeur approché du nombre d'individu l'année $2020 + n$.

En effet, par définition (début de l'énoncé), $u_{n+1} = 0,95u_n + 200$. u_n étant le nombre d'individu l'année $2020 + n$, $0,95u_n$ désigne 95% de ce nombre d'individus (il y a 5% de baisse), il suffit d'y ajouter 200 pour obtenir le nombre d'individus de l'année suivante soit $0,95u_n + 200$. On retrouve la bien la relation de récurrence définisant la suite (u_n).

Dans cette correction, on propose un algorithme permettant de déterminer l'année où le nombre d'individus passe sous le seuil de 5000 (la moitié de 10000). Pour cela, on détermine le plus petit entier n tel que $u_n < 5000$.

Le programme suivant nous donne la solution n_0. L'année cherchée est $2020 + n_0$.

```
def seuil() :
    u=10000
    n=0
    while u<= 5000 :
        u=0.95*u+200
        n=n+1
    return n
```

L'excution de `seuil()` renvoie 35.

Ainsi on peut en déduire que l'année cherchée est $2020 + 35 = 2055$

ce qui prouve que $\boxed{\text{l'affirmation du responsable d'association est correcte}}$

Exercice 8. 8 points

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1000$.

1. Calculer u_1 et u_2. En déduire que (u_n) n'est ni arithémtique ni géométrique.
2. La fonction Python nommée `suite` est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par `suite(10)`.

```
def suite(n) :
    u=1000
    for i in range(n) :
        u=0.9*u+250
    return u
```

3. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1} \leq 2500$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1500$.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que : $u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500$.
5. Déterminer une méthode permettant de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200. Il pourra s'agir d'un programme. Déterminer cette année.

Correction

1. Calculer u_1 et u_2. En déduire que (u_n) n'est ni arithémtique ni géométrique.

$u_1 = 1000 - 0,1 \times 1000 + 250 = 1150$ et $u_2 = 1150 - 0,1 \times 1150 + 250 = 1285$

On a $u_2 - u_1 = 135 \neq u_1 - u_0 = 150$ donc (u_n) n'est pas arithémtique

et $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

2. La fonction Python nommée `suite` est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par `suite(10)`.

```
def suite(n) :
    u=1000
    for i in range(n) :
        u=0.9*u+250
    return u
```

La valeur renvoyée `suite(10)` représente le nombre estimé d'abonnés (à l'unité près) de l'influenceuse en 2030 (=2020+10).

$\boxed{\text{On peut donc estimer qu'elle aura 1977 abonnés en 2030}}$

3. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1} \leq 2500$.

On pose pour tout entier naturel n la propriété $\mathscr{P}_n$: $u_n \leq u_{n+1} \leq 2500$

i. *Initialisation.* $u_0 \leq u_1 \leq 2500$ d'après la question 1, d'où $\mathscr{P}_0$ est vraie.

ii. *Hérédité.* Soit k un nombre entier naturel. On note suppose $\mathscr{P}_k$.

On a donc $u_k \leq u_{k+1} \leq 2500$

Comme $0,9 > 0$, on a $0,9u_k \leq 0,9u_{k+1} \leq 0,9 \times 2500$.

Enfin on obtient $0,9u_k + 250 \leq 0,9u_{k+1} + 250 \leq 0,9 \times 2500 + 250$.

Autrement dit $u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 2500$ qui n'est autre que $\mathscr{P}_{k+1}$.

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_k$ implique $\mathscr{P}_{k+1}$.

iii. *Conclusion.* Par initialisation et hérédité, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$

Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1} \leq 2500}$

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante.

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2500$.

(u_n) étant croissante et majorée par 2500, D'après le théorème de convergence

on en déduit $\boxed{\text{qu'elle converge vers un nombre inférieur ou égal à 2500}}$

4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n.

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1500$.

Soit n un entier naturel. On a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 2500 \\
&= 0,9u_n + 250 - 2500 \\
&= 0,9(v_n + 2500) - 2250 \\
&= 0,9v_n + 0,9 \times 2500 - 2250 \\
&= 0,9v_n.
\end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0,9v_n$

De plus son terme initial est $v_0 = u_0 - 2500 = 1000 - 2500 = -1500$.

Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } 0,9 \text{ et de premier terme } v_0 = -1500}$

(b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que : $u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500$

Comme (v_n) est géométriquede raison $0,9$ et de premier terme $v_0 = -1500$ alors le terme général de (v_n) est $v_n = -1500 \times 0,9^n$

De plus $v_n = u_n - 2500$ d'où $u_n = v_n + 2500$

Alors pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 2500 = -1500 \times 0,9^n + 2500$

On en déduit que $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n - 1500 \times 0,9^n + 2500}$

5. Déterminer une méthode permettant de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200. Il pourra s'agir d'un programme. Déterminer cette année.

Solution proposée : On écrit un programme qui détermine le plus petit entier n tel que $u_n \geq 2200$.

Pour obtenir l'année, on ajoute 2020 à cet indice.

```
def seuil() :
    u=1000
    n=0
    while u<= 2200 :
        u=0.9*u+250
        n=n+1
    return n
```

L'excution de `seuil()` renvoie `16`.

On en déduit que $\boxed{\text{le nombre d'abonnées dépassera 2200 en 2036}}$