DS 1 - lundi 12 octobre

Durée : 2 heures

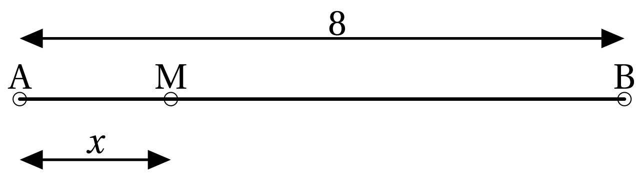
Nom : .... Prénom : ....

TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Exercice 5
	/ 3,5	/6	/ 3	/ 5,5	/4

Exercice 1. 3,5 points

On considère la fonction f que l'on définit sur l'intervalle $]0;\ 8[$ par $f(x) = \dfrac{8}{8x - x^2}$.

1. Prouver que, pour tout $x \in]0;\ 8[$, la dérivée de f est définie par $f'(x) = \dfrac{-64 + 16x}{\left(8x - x^2\right)^2}$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;\ 8[$
3. Quelle est la valeur du minimum de la fonction f sur $]0;\ 8[$?
4. Application :



Deux haut-parleurs sont positionnés en A et en B.

Un auditeur M est situé entre les deux haut-parleurs distants de 8 mètres. Le niveau sonore de ce qu'il entend est proportionnel à $\dfrac{1}{\mathrm{AM}} + \dfrac{1}{\mathrm{BM}}$.

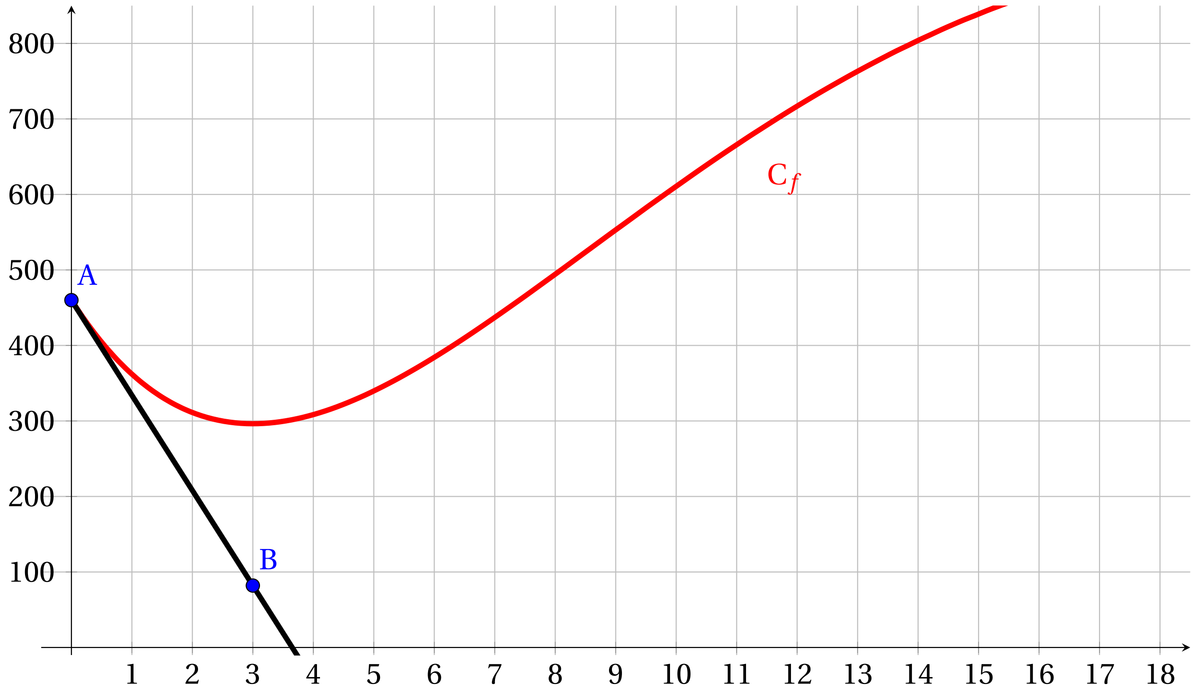
On note x la distance qui sépare M de A.

Déterminer la position de l'auditeur pour avoir le niveau sonore le plus faible.

Exercice 2. 6 points

Partie A

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,19]$, représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 (année numéro 0) et le 1er janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.



Ainsi, le 1er janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.

1. Décrire l'évolution de l'audience journalière de cette chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2019.
2. Donner une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1er janvier 2014.
3. La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées A$(0\,;\,460)$ et B$(3\,;\;82)$, est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.

   Déterminer la valeur de $f'(0)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f représentée par $(\mathscr{C})$?

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.

On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,29]$ par : $f(x) = (20x^2 - 80x + 460)e^{-0,1x}$

où x représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple $x = 19$ pour l'année 2019).

1. Donner une valeur approchée au millier du nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1er janvier 2014.
2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;\,29]$.
   (a) Démontrer que f' est définie par : $f'(x) = (-2x^2 + 48x - 126)e^{-0,1x}$.
   (b) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,29]$ et construire le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,29]$. Arrondir les éléments du tableau à l'unité.
   (c) Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029 ? Justifier.

Exercice 3. 3 points

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.
2. Comparer les quatre premiers termes de la suite (u_n) aux quatre premiers termes de la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.
3. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

Exercice 4. 5,5 points

Depuis le 1er janvier 2015, une commune dispose de vélos en libre service. La société Bicycl'Aime est chargée de l'exploitation et de l'entretien du parc de vélos.

La commune disposait de 200 vélos au 1er janvier 2015.

La société estime que, chaque année, 15 % des vélos sont retirés de la circulation à cause de dégradations et que 42 nouveaux vélos sont mis en service.

On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de vélos de cette commune au 1er janvier de l'année $2015+n$.

1. Déterminer le nombre de vélos au 1er janvier 2016.

2. Justifier que la suite (u_n) est définie par $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = 0,85u_n + 42$.

3. On donne l'algorithme suivant :

```
Entrée
N est un entier
U est un nombre réel
Initialisation
N prend la valeur 0
U prend la valeur 200
Traitement
Tant que N < 4 faire
    U prend la valeur 0,85 × U + 42
    N prend la valeur N + 1
FinTantque
Sortie
Afficher U .
```

   (a) Compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on à l'arrêt de l'algorithme ?

U	200				
N	0	1	2	3	4
Condition $N < 4$	Vrai				

   (b) Interpréter la valeur du nombre U obtenue à l'issue de l'exécution de cet algorithme.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 280$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,85$ et de premier terme $v_0 = -80$.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = -80 \times 0,85^n + 280$.
5. La société Bicycl'Aime facture chaque année à la commune 300 € par vélo en circulation au 1er janvier.
   Déterminer le coût total pour la période du 1er janvier 2015 au 31 décembre 2019, chacun des termes utilisés de la suite (u_n) étant exprimé avec un nombre entier.

Exercice 5. 4 points

Partie A

Une course oppose 20 concurrents, dont Bernard.

a) Combien y-a-t-il de podiums possibles ?

b) Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Bernard fait partie ?

Partie B

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

a) sans imposer de contraintes sur les cartes.

b) 2 carreaux et 3 piques.

c) au moins un roi.

d) 2 rois et 3 piques (exactement).