DS 1 - lundi 12 octobre

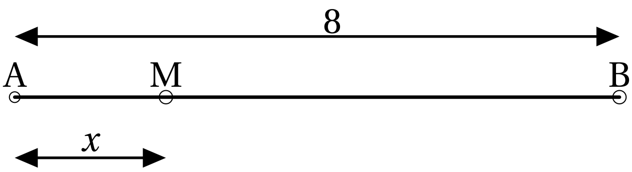
Durée : 2 heures

Nom : .... Prénom : ....

Exercice 1. 3,5 points

On considère la fonction f que l'on définit sur l'intervalle $]0;\ 8[$ par $f(x) = \dfrac{8}{8x - x^2}$.

1. Prouver que, pour tout $x \in]0;\ 8[$, la dérivée de f est définie par $f'(x) = \dfrac{-64 + 16x}{\left(8x - x^2\right)^2}$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;\ 8[$
3. Quelle est la valeur du minimum de la fonction f sur $]0;\ 8[$?
4. Application :



Deux haut-parleurs sont positionnés en A et en B.

Un auditeur M est situé entre les deux haut-parleurs distants de 8 mètres. Le niveau sonore de ce qu'il entend est proportionnel à $\dfrac{1}{\mathrm{AM}} + \dfrac{1}{\mathrm{BM}}$.

On note x la distance qui sépare M de A.

Déterminer la position de l'auditeur pour avoir le niveau sonore le plus faible.

Correction

On considère la fonction f que l'on définit sur l'intervalle $]0;\ 8[$ par $f(x) = \dfrac{8}{8x - x^2}$.

1. La fonction f est dérivable sur $]0;8[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0;8[$

   On a $f = \dfrac{u}{v}$ et $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u(x) = 8$ et $u'(x) = 0$

   $v(x) = 8x - x^2 \quad et \quad v'(x) = 8 - 2x$

   D'où $f'(x) = \dfrac{0 \times \left(8x - x^2\right) - 8 \times (8 - 2x)}{\left(8x - x^2\right)^2} = \dfrac{-64 + 16x}{\left(8x - x^2\right)^2}$

   Donc $\boxed{\text{pour tout x apparatenant à }]0;8[\ f'(x) = \dfrac{-64 + 16x}{\left(8x - x^2\right)^2}}$

2. Etudions le signe de la dérivée $f'(x)$ sur $]0;8[$

   Comme pour tout x appartenant à $]0;8[$, $\left(8x - x^2\right)^2 > 0$

   Alors le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $-64 + 16x$

x	0		4		8
$-64+16x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
f	‖	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	‖

3. D'après le tableau de variation de la question 2, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet un minimum en 4 qui vaut } \frac{1}{2}}$

4. On sait que $\mathrm{AM} = x$ et $\mathrm{BM} = 8$

   Et le niveau sonore de ce qu'il entend est proportionnel à $\dfrac{1}{\mathrm{AM}} + \dfrac{1}{\mathrm{BM}}$

   Alors $\dfrac{1}{\mathrm{AM}} + \dfrac{1}{\mathrm{BM}} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{8-x} = \dfrac{(8-x)+x}{x(8-x)} = \dfrac{8}{x(8-x)} = \dfrac{8}{8x-x^2} = f(x)$

   D'après la question 3, la fonction f admet un minimum en 4

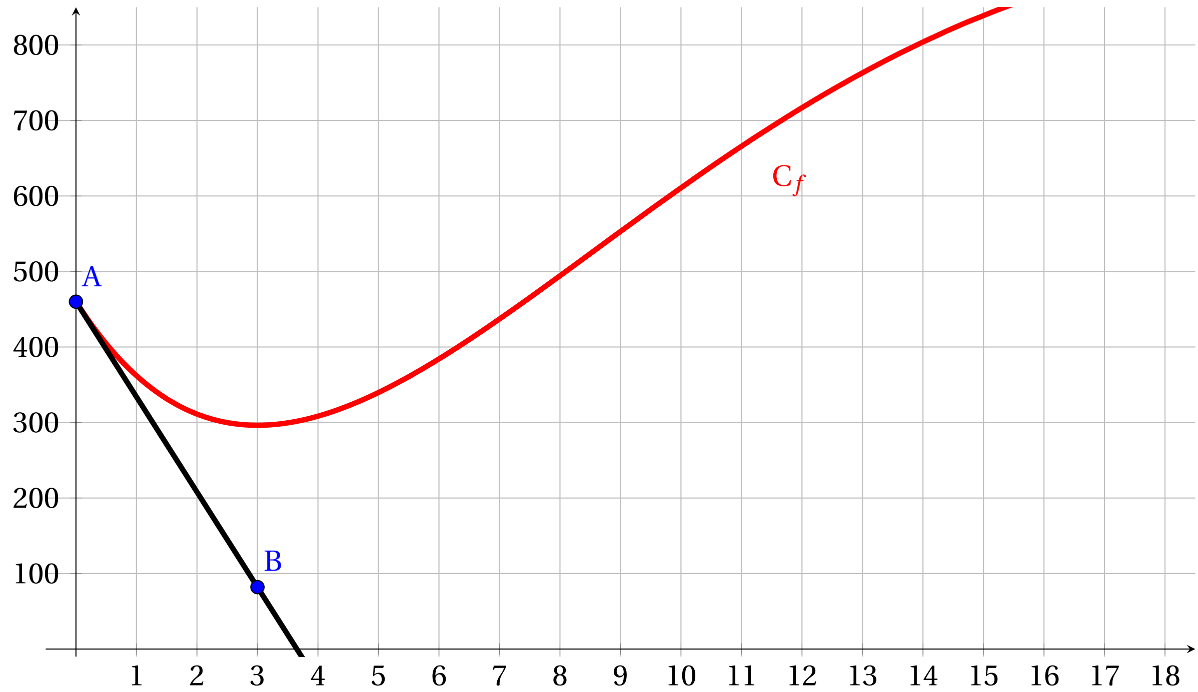
   Donc $\boxed{\text{le niveau sonore le plus faible sera donc lorsque l'auditeur se trouvera à égale distance}}$

   $\boxed{\text{des deux haut-parleurs.}}$

Exercice 2. 6 points

Partie A

La courbe ($\mathscr{C}$) ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,19]$, représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 (année numéro 0) et le 1er janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.



Ainsi, le 1er janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.

1. Décrire l'évolution de l'audience journalière de cette chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2019.
2. Donner une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1er janvier 2014.
3. La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées A$(0\,;\,460)$ et B$(3\,;\;82)$, est la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A.

   Déterminer la valeur de $f'(0)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f représentée par ($\mathscr{C}$) ?

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.

On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,29]$ par : $f(x) = \left(20x^2 - 80x + 460\right)e^{-0,1x}$

où x représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple $x = 19$ pour l'année 2019).

1. Donner une valeur approchée au millier du nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1er janvier 2014.

2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;\,29]$.

   (a) Démontrer que f' est définie par : $f'(x) = (-2x^2 + 48x - 126)e^{-0,1x}$.

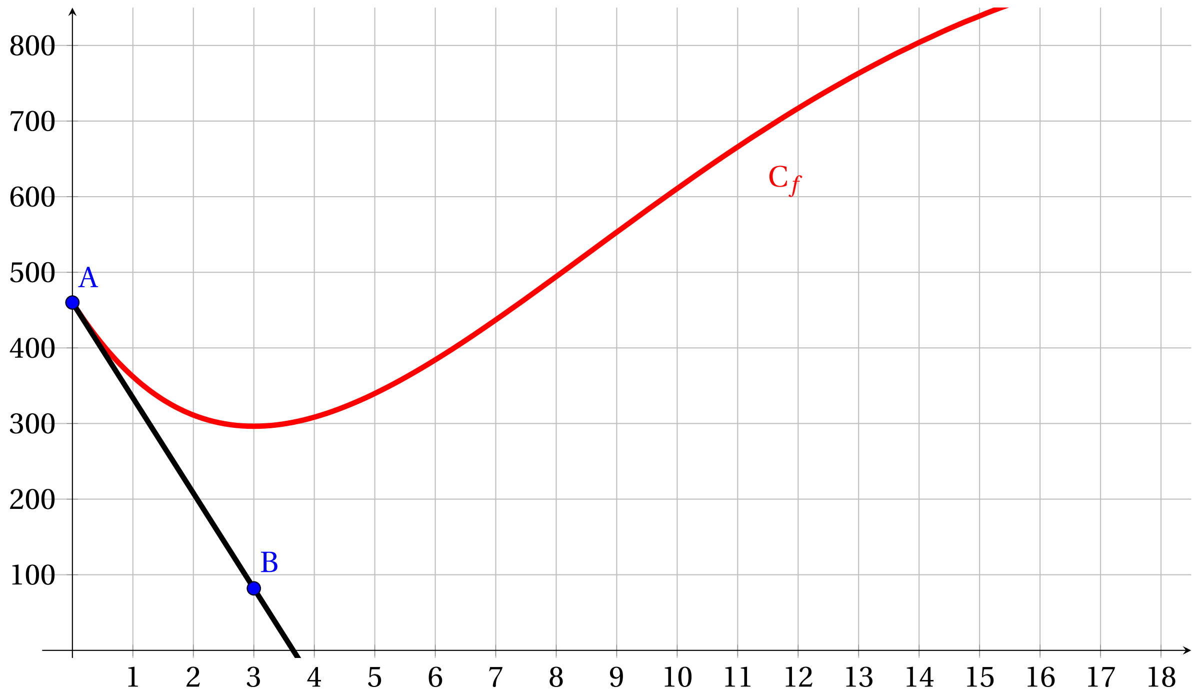
   (b) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,29]$ et construire le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,29]$. Arrondir les éléments du tableau à l'unité.

   (c) Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029 ? Justifier.

Correction - Sujet : BAC ES/L - Amérique du Sud 13 novembre 2019

Partie A

La courbe (C) ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,19]$, représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 (année numéro 0) et le 1er janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.



Ainsi, le 1er janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.

1. De 2000 à 2003, l'audience a baissé de 460 000 à 300 000 téléspectateurs, puis de 2003 à 2019 a régulièrement progressé à plus de 900 000 téléspectateurs.

2. On lit en 2014 environ $\boxed{\text{800 000 téléspectateurs}}$.

3. $f'(0)$ nombre dérivé de la fonction en 0 est le coefficient directeur de la droite (AB), soit :
   $f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{82 - 460}{3 - 0} = \dfrac{-378}{3} = -126.$
   Donc $\boxed{f'(0) = -126}$

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.

On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,29]$ par : $f(x) = \left(20x^2 - 80x + 460\right)\mathrm{e}^{-0,1x}$

où x représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple $x = 19$ pour l'année 2019).

1. 2014 correspond à $x = 14$.

   D'où $f(14) = \left(20 \times 14^2 - 80 \times 14 + 460\right)\mathrm{e}^{-0,1\times 14} \approx 803,906$

   Donc $\boxed{\text{804 milliers de téléspectateurs à un millier près.}}$

2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;\,29]$.

   (a) f est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;\,29]$ et sur cet intervalle :

   $$f'(x) = (2 \times 20x - 80)\mathrm{e}^{-0,1x} + \left(20x^2 - 80x + 460\right)(-0,1)\mathrm{e}^{-0,1x}$$
   $$= \left(40x - 80 - 2x^2 + 8x - 46\right)\mathrm{e}^{-0,1x} = \left(-2x^2 + 48x - 126\right)\mathrm{e}^{-0,1x}.$$

   Donc $\boxed{f'(x) = \left(-2x^2 + 48x - 126\right)\mathrm{e}^{-0,1x}.}$

   Rem. On peut vérifier que $f'(0) = -126$ (cf. question **3.** de la partie A.)

   (b) On considère l'équation : $-2x^2 + 48x - 126 = 0 \iff -x^2 + 24x - 63 = 0$.

   Pour ce trinôme :

   $\Delta = 24^2 - 4 \times (-1) \times (-63) = 576 - 252 = 324 = 4 \times 81 = 2^2 \times 9^2 = (2 \times 9)^2 = 18^2$.

   $\Delta > 0$, donc l'équation du second degré a deux solutions :

   $$x_1 = \frac{-24 + 18}{2 \times (-1)} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-24 - 18}{2 \times (-1)} = 21.$$

   On sait que le trinôme est du signe de $a = -1$ donc négatif sauf sur $[3\,;\,21]$, où $f(x) \geqslant 0$.

   La fonction est donc décroissante sauf sur l'intervalle $[3\,;\,21]$ où elle est croissante.

   On a $f(0) = 460$; $f(3) \approx 296$; $f(21) \approx 931$ et $f(29) \approx 826$.

   D'où le tableau de variations :

x	0		3		21		29
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f	460 ↘		296	↗	931	↘	823

   (c) Le tableau de variations de la fonction f montre que le maximum de téléspectateurs est de 931 milliers en 2021 ; la barre du million ne sera jamais atteinte entre 2000 et 2029.

Exercice 3. 3 points

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.
2. Comparer les quatre premiers termes de la suite (u_n) aux quatre premiers termes de la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.
3. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

Correction - Sujet : Baccalauréat S Pondichéry 1^{er} avril 2004

1. On a $u_0 = 0$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{2-\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$ et $u_3 = \dfrac{1}{2-\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{4}$.
2. On a de façon évidente : $w_0 = u_0$, $w_1 = u_1$ $w_2 = u_2$ et $w_3 = u_3$.
3. On pose pour tout entier naturel n la propriétée P_n : $u_n = w_n$

   - *Initialisation :* on a $w_0 = \dfrac{0}{0+1} = 0$ et $u_0 = 0$, d'où $u_0 = w_0$

     Donc la propriété P_0 est donc vraie

   - *Hérédité :* Pour un certain entier n, on suppose que la propriété P_n est vraie, c'est à dire $u_n = w_n = \dfrac{n}{n+1}$

     et on doit montrer que P_{n+1} est vraie, c'est à dire $u_{n+1} = w_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$

     On a : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} = \dfrac{1}{2-\frac{n}{n+1}} = \dfrac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n+2} = w_{n+1}$.

   - *Conclusion :* la propriété e est initialisée au rang 0 et elle est héréditaire, par le principe de récurrence, on en coclut que pour tout entier n est vraie

     Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = w_n = \dfrac{n}{n+1}}$

Exercice 4. 5,5 points

Depuis le 1er janvier 2015, une commune dispose de vélos en libre service. La société Bicycl'Aime est chargée de l'exploitation et de l'entretien du parc de vélos.

La commune disposait de 200 vélos au 1er janvier 2015.

La société estime que, chaque année, 15 % des vélos sont retirés de la circulation à cause de dégradations et que 42 nouveaux vélos sont mis en service.

On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de vélos de cette commune au 1er janvier de l'année $2015+n$.

1. Déterminer le nombre de vélos au 1er janvier 2016.
2. Justifier que la suite (u_n) est définie par $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = 0,85u_n + 42$.
3. On donne l'algorithme suivant :

```
Entrée
N est un entier
U est un nombre réel
Initialisation
N prend la valeur 0
U prend la valeur 200
Traitement
Tant que N < 4 faire
    U prend la valeur 0,85 × U + 42
    N prend la valeur N + 1
FinTantque
Sortie
Afficher U .
```

(a) Compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on à l'arrêt de l'algorithme ?

U	200				
N	0	1	2	3	4
Condition $\mathrm{N} < 4$	Vrai				

(b) Interpréter la valeur du nombre U obtenue à l'issue de l'exécution de cet algorithme.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 280$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,85$ et de premier terme $v_0 = -80$.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = -80 \times 0,85^n + 280$.
5. La société Bicycl'Aime facture chaque année à la commune 300 € par vélo en circulation au 1er janvier. Déterminer le coût total pour la période du 1er janvier 2015 au 31 décembre 2019, chacun des termes utilisés de la suite (u_n) étant exprimé avec un nombre entier.

Correction - Sujet : Baccalauréat ES - Centres étrangers 10 juin 2015

1. Au premier janvier 2016, on a perdu 15 % des vélos, soit : $200 \times \left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 200 \times 0,85$, mais on rajoute 42 nouveaux vélos mis en service, soit : $200 \times 0,85 + 42 = 212$.
2. Cette démarche restant la même si nous passons d'une année n à une année $n+1$, on perd toujours 15 % des vélos, soit encore : $u_n \times 0,85$ auquel on rajoute 42 nouveaux vélos, soit encore : $u_n \times 0,85 + 42 = u_{n+1}$.

   Ainsi : $u_{n+1} = 0,85u_n + 42$ avec $u_0 = 200$, nombre de vélos au départ.
3. (a) On obtient : $\mathrm{U} = 238$ et $\mathrm{N} = 4$.

U	200	212	222	231	238
N	0	1	2	3	4
Condition $\mathrm{N} < 4$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

   (b) En 2019, nous aurons 238 vélos.
4. (a) Nous avons :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 280 \\ &= 0,85u_n + 42 - 280 \\ &= 0,85u_n - 238 \\ &= 0,85(u_n - 280) \\ &= 0,85v_n \end{aligned}$$
   Le premier terme : $v_0 = u_0 - 280 = 200 - 280 = -80$.

   Donc $\boxed{(v_n) \text{ est bien géométrique de raison } q = 0,85 \text{ et de premier terme } v_0 = -80.}$

   (b) Le terme général d'une suite géométrique de premier terme v_0 vaut : $v_n = v_0 \times q^n$.

   Soit encore : $\boxed{\text{pour tout nombre entier } n, \text{ on a } v_n = -80 \times 0,85^n.}$

   (c) Comme pour tout nombre entier n, on a $v_n = -80 \times 0,85^n$ Or : $u_n = v_n + 280$.
   Ainsi : $\boxed{\text{pour tout nombre entier } n,\ u_n = -80 \times 0,85^n + 280.}$

(d) Question non posée : Calculer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat.

On a $u_n = a_n \times b_n + c_n$, avec :

- $a_n = -80$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -80$
- $b_n = 0,85^n$, qui est de la forme q^n avec $q \in]0;1[$, ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0^+$
- $c_n = 280$, $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 280$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 280$.

C'est à dire $\boxed{\text{le nombre de vélos tendra vers 280 quand le nombre d'années écoulées sera grand.}}$

5. Au 31 décembre 2019 cinq années se sont écoulées, il faudra donc calculer le nombre de vélos pour n variant de 0 à 4 avec $u_4 \approx 238$.

   On a : $u_0 + \cdots + u_4 \approx 200 + 212 + 222 + 231 + 238 = 1\,103$ vélos.

   Le coût unitaire d'un vélo est de 300 €, alors $1\,103 \times 300 = 330\,900$ €.

   Donc $\boxed{\text{le coût total est de 330900 €.}}$

Exercice 5. 2 points

Une course oppose 20 concurrents, dont Bernard.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Bernard est premier ?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Bernard fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

Correction

1. Pour le premier, on a 20 choix possibles, pour le second 19, pour le troisième 18.

   Alors $20 \times 19 \times 18 = 6840$

   $\boxed{\text{Le nombre de podiums possibles est donc égal à } 6840.}$
2. Le premier concurrent est Bernard. Pour les autres places, il y a 19 puis 18 choix possibles.

   Alors $19 \times 18 = 342$.

   $\boxed{\text{Le nombre de podiums ainsi constitués est de } 342.}$
3. Il y a trois choix possibles pour la place de Bernard. Une fois ce choix fixé, il y a 19 choix possibles pour la première des deux autres places, puis 18 choix possibles pour la seconde des deux autres places.

   Alors $3 \times 19 \times 18 = 1\ 026$

   $\boxed{\text{Le nombre de podiums vérifiant ces conditions est donc de } 1\ 026.}$
4. L'ordre n'est plus important, et on cherche le nombre de choix de 3 concurrents parmi 20, c'est-à-dire $\binom{20}{3} = 1\ 140$.

   Donc $\boxed{\text{il y a } 1\ 140 \text{ de distributions de récompenses possibles.}}$

Exercice 6. 2 points

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1. sans imposer de contraintes sur les cartes.
2. 2 carreaux et 3 piques.
3. au moins un roi.
4. 2 rois et 3 piques (exactement).

Correction

1. Il n'y a pas d'ordre et pas de répétition sur les cartes : un tirage est donc une combinaison de 5 cartes parmi 32.

   $\boxed{\text{Il y a : } \binom{32}{5} \text{ soit 201 376 tirages différents.}}$

2. Il y a $\binom{8}{2}$ façons de choisir 2 carreaux parmi 8 puis, pour chacune de ces façons, il y a $\binom{8}{3}$ façons de choisir 3 piques.

   $\boxed{\text{Le nombre de tirages recherché est donc : } \binom{8}{2} \times \binom{8}{3} = 1568.}$

3. On compte le complémentaire, c'est à dire les tirages sans rois : il faut alors choisir 5 cartes parmi 28, il y a $\binom{28}{5}$ tels tirages.

   $\boxed{\text{Le nombre de tirages recherché est donc : } \binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103\ 096.}$

4. On sépare les tirages contenant le roi de pique et ceux ne contenant pas le roi de pique.
   - si le tirage ne contient pas le roi de pique, il y a $\binom{3}{2}$ choix différents de 2 rois parmi 3, puis $\binom{7}{3}$ choix de 3 piques parmi 7 (tous sauf le roi de pique).
   - si le tirage contient le roi de pique, il reste 3 choix pour le roi différent du roi de pique, puis $\binom{7}{2}$ choix pour les deux autres piques. Cela faisant, on n'a tiré que 4 cartes. Il reste une carte à choisir qui n'est ni un roi, ni un pique, et donc $32-(4+7)=21$ choix (attention à ne pas compter à nouveau deux fois le roi de pique !).

   Alors $\binom{3}{2} \times \binom{7}{3} + 3 \times \binom{7}{2} \times 21 = \binom{3}{2} \times \binom{7}{3} + \binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{1} = 1\ 428$

   Donc $\boxed{\text{le nombre de tirages possibles est 1 428.}}$