Le sujet est composé de 3 exercices. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, quil aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans lappréciation des copies.

La calculatrice est autorisée - Durée : 1h50

Sujet à rendre avec la copie, la copie sera glissée à l'intérieur du sujet.

Nom et Prénom : ....

Total	Ex 1	Ex2	Ex3
/20	/6	/7	/7

Exercice 1. **6 points**

Patrick pratique la course à pied plusieurs fois par semaine. Il a trois parcours différents, notés A, B et C et deux types de séances d'entraînement : Endurance, notée E et Vitesse, notée V.
Chaque fois que Patrick va courir, il choisit un parcours (A, B ou C), puis un type d'entraînement (E ou V).

Si A et B désignent deux évènements d'une même expérience aléatoire, alors on notera $\overline{\mathrm{A}}$ l'évènement contraire de A, $p(\mathrm{A})$ la probabilité de l'évènement A, et $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ la probabilité de l'évènement B sachant que A est réalisé, avec $p(\mathrm{A}) \neq 0$.

Patrick va courir aujourd'hui. On considère les évènements suivants :

- A : « Patrick choisit le parcours A »
- B : « Patrick choisit le parcours B »
- C : « Patrick choisit le parcours C »
- E : « Patrick fait une séance d'endurance »
- V : « Patrick fait une séance de vitesse »

On sait que :

- Patrick choisit le parcours A dans 20 % des cas et le parcours B dans 50 % des cas ;
- si Patrick choisit le parcours A, alors il fait une séance d'endurance dans 40 % des cas ;
- si Patrick choisit le parcours B, alors il fait une séance d'endurance dans 70 % des cas.

1. Faire un arbre de probabilité décrivant la situation ci-dessus.
2. (a) Donner la valeur de $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{E})$.

   (b) Calculer $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{V})$.
3. Déterminer la probabilité que Patrick choisisse le parcours C.
4. Déterminer la probabilité que Patrick choisisse le parcours A et une séance de vitesse.
5. On sait que $p(\mathrm{E}) = 0,7$. Montrer que : $p(\mathrm{E} \cap \mathrm{C}) = 0,27$.
6. On sait que Patrick a choisi le parcours C. Quelle est la probabilité qu'il fasse une séance d'endurance ?

Exercice 2. **7 points**

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

On utilisera pour cela la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1. En utilisant la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous avec les premiers termes de (u_n) et (v_n). On arrondira les résultats à 10^{-3} près.

n	0	1	2	3
u_n	2			
v_n				

2. (a) Justifier que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
   (b) Quel semble être le comportement de la suite (u_n) ?
   (c) Quelle semble être la nature de (v_n) ?
3. Démontrer par récurrence que les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.
4. (a) Etudier le sens de variation de (u_n).
   (b) Justifier que (u_n) converge.
5. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2.
6. En déduire l'expression de v_n puis montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2}{1+4n}$.
7. Déterminer la limite de u_n.
8. (a) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche le plus petit n tel que $u_n < 10^{-2}$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel.
Initialisations :	Affecter à u la valeur ......
	Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que ....
	Affecter à u la valeur ....
	Affecter à n la valeur $n+1$.
Sortie :	Afficher ....

   (b) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n < 10^{-2}$.

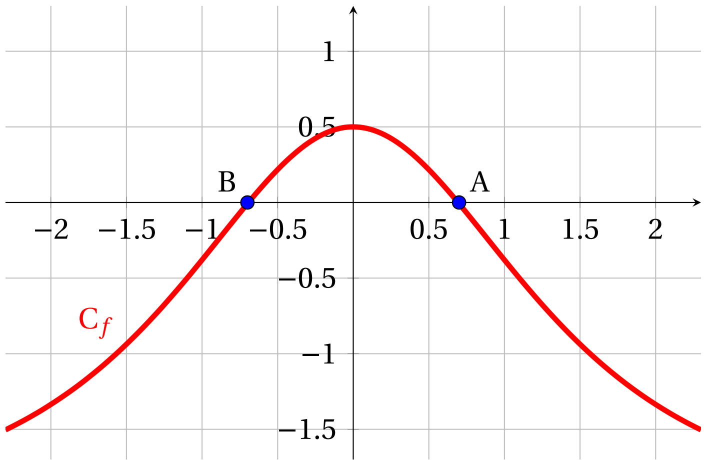
Exercice 3. **7 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -2 + \frac{5\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B (admis).



Les questions **1.** et **2.** sont indépendantes.

1. (a) Vérifier que pour tout réel x, $\quad f'(x) = \dfrac{5\mathrm{e}^x\left(1-\mathrm{e}^{2x}\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$.

   (b) Étudier les variations de la fonction f sur $]-\infty;\ +\infty[$.

   (c) Justifier que pour tout réel x, $-2 < f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

   (d) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une unique tangente horizontale en un point S dont on précisera les coordonnées.

2. On désigne par a l'abscisse du point A, par b l'abscisse du point B et on pose $s = \mathrm{e}^a$ et $t = \mathrm{e}^b$, par définition $a > b$.

   (a) Résoudre l'équation $2\mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 2 = 0$.

   (b) Démontrer que s est une solution de l'équation $2\mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 2 = 0$. On admettra que t est aussi solution de cette équation.

   (c) En déduire les valeurs de s et t.

   (d) Justifier que $a = -b$. (On ne demande pas de calculer a et b).