La calculatrice est autorisée - Durée : 1h50

Exercice 1.

Patrick pratique la course à pied plusieurs fois par semaine. Il a trois parcours différents, notés A, B et C et deux types de séances d'entraînement : Endurance, notée E et Vitesse, notée V.
Chaque fois que Patrick va courir, il choisit un parcours (A, B ou C), puis un type d'entraînement (E ou V).

Si A et B désignent deux évènements d'une même expérience aléatoire, alors on notera $\overline{\mathrm{A}}$ l'évènement contraire de A, $p(\mathrm{A})$ la probabilité de l'évènement A, et $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ la probabilité de l'évènement B sachant que A est réalisé, avec $p(\mathrm{A}) \neq 0$.

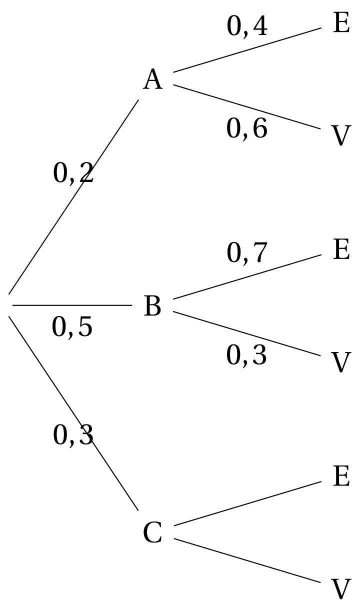
Patrick va courir aujourd'hui. On considère les évènements suivants :

- A : « Patrick choisit le parcours A »
- B : « Patrick choisit le parcours B »
- C : « Patrick choisit le parcours C »
- E : « Patrick fait une séance d'endurance »
- V : « Patrick fait une séance de vitesse »

On sait que :

- Patrick choisit le parcours A dans 20 % des cas et le parcours B dans 50 % des cas ;
- si Patrick choisit le parcours A, alors il fait une séance d'endurance dans 40 % des cas ;
- si Patrick choisit le parcours B, alors il fait une séance d'endurance dans 70 % des cas.

1. Faire un arbre de probabilité décrivant la situation ci-dessus.



2. (a) Donner la valeur de $p_A(E)$.

   On sait que si Patrick choisit le parcours A, alors il fait une séance d'endurance dans 40 % des cas)

   Donc $\boxed{p_A(E) = 0,4}$

   (b) Calculer $p_B(V)$.

   On saait que $p_B(E) = 0,7$ et E et V forme une partition

   D'où $p_B(V) = 1 - p_B(E) = 1 - 0,7 = 0,3$

   Donc $\boxed{p_B(V) = 0,3}$

3. Déterminer la probabilité que Patrick choisisse le parcours C.

   On sait que A, B et C forment une partition

   D'où $p(C) = 1 - p(A) - p(B) = 1 - 0,2 - 0,5 = 0,3$

   Donc $\boxed{\text{la probabilité que Patrick choisisse le parcours C est de } 0,3}$

4. Déterminer la probabilité que Patrick choisisse le parcours A et une séance de vitesse.

   Comme on cherche la probabilité que Patrick choisisse le parcours A et une séance de vitesse, il faut calculer $p(A \cap V)$

   D'où $p(A \cap V) = p(A) \times p_A(V) = 0,2 \times 0,6 = 0,12$.

   Donc $\boxed{p(A \cap V) = 0,12}$

5. On sait que $p(E) = 0,7$. Montrer que : $p(E \cap C) = 0,27$.

   On sait que A, B et C forment une partition

   D'après la loi des probabilités totales on a :

   $p(E) = p(A \cap E) + p(B \cap E) + p(C \cap E)$

   $p(C \cap E) = p(E) - p(A \cap E) - p(B \cap E) = 0,7 - 0,2 \times 0,4 - 0,5 \times 0,7 = 0,7 - 0,08 - 0,35 = 0,27$.

   Donc $\boxed{p(E \cap C) = 0,27}$

6. On sait que Patrick a choisi le parcours C. Quelle est la probabilité qu'il fasse une séance d'endurance ?

   Il faut trouver $p_C(E) = \dfrac{p(C \cap E)}{p(C)} = \dfrac{0,27}{0,3} = 0,9$.

   Donc sachant que Patrick a choisi le parcours C, la probabilité qu'il fasse une séance d'endurance est de $\boxed{0,9}$

Exercice 2.

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n}{1+2u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$$

On utilisera pour cela la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1. En utilisant la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous avec les premiers termes de (u_n) et (v_n). On arrondira les résultats 10^{-3} près.

n	0	1	2	3
u_n	2	$0,4$	$0,222$	$0,154$
v_n	$0,5$	$2,5$	$4,5$	$6,5$

2. (a) Justifier que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Comme $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
Comme $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.
Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est ni arithmétique, ni géométrique.}}$

(b) Quel semble être le comportement de la suite (u_n) ?

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ semble décroissante.}}$

(c) Quelle semble être la nature de (v_n) ?

$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ semble arithmétique de raison 2.}}$

3. Démontrer par récurrence que les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}_n \ : \ u_n > 0$.

- **Initialistion.** Comme$u_0 = 2 > 0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité.** Supposons pour un certain $k \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie, c'est à dire que $u_k > 0$.
  Alors $2u_k + 1 > u_k > 0$ alors $\dfrac{u_k}{1+2u_k} > 0$ donc $u_{k+1} > 0$
  Donc $\mathscr{P}_k \Rightarrow \mathscr{P}_{k+1}$.
- **Conclusion.** Par initialisation et hérédité, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vérifiée pour tout n
  donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.}$

4. (a) Etudier le sens de variation de (u_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+2u_n} - u_n = u_n\left(\frac{1}{1+2u_n} - 1\right) = u_n\left(\frac{1}{1+2u_n} - \frac{1+2u_n}{1+2u_n}\right)$$

$$= u_n\left(\frac{1-(1+2u_n)}{1+2u_n}\right) = \frac{-2u_n^2}{1+2u_n}.$$

Comme $u_n > 0$ alors $1+2u_n > 0$ et $u_n^2 > 0$ alors $\frac{-2u_n^2}{1+u_n} < 0$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

(b) Justifier que (u_n) converge.

D'après les questions précédentes, on sait que (u_n) est strictement décroissante et minorée par 0

En appliquant le théorème convergence,

On en déduit $\boxed{\text{cette suite } (u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \geq 0.}$

5. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{1+2u_n}} = \frac{1+2u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + \frac{2u_n}{u_n} = v_n + 2.$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est arithmétique de raison 2.}}$

6. En déduire l'expression de v_n puis montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2}{1+4n}$.

D'après le 5., la suite (v_n) est arithmétique de raison 2.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n$ avec $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$

D'où $v_n = \frac{1}{2} + 2n$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n}$ alors $u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\frac{1}{2}+2n} = \frac{1}{\frac{1+4n}{2}} = \frac{2}{1+4n}$

Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2}{1+4n}}$

7. Déterminer la limite de u_n.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 1+4n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{1+4n} = 0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

8. (a) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche n tel que $u_n < 10^{-2}$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel.
Initialisations :	Affecter à u la valeur 2
	Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $u \geq 10^{-6}$
	Affecter à u la valeur $\dfrac{u}{1+u}$
	Affecter à n la valeur $n+1$.
Sortie :	Afficher n.

(b) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n < 10^{-2}$.

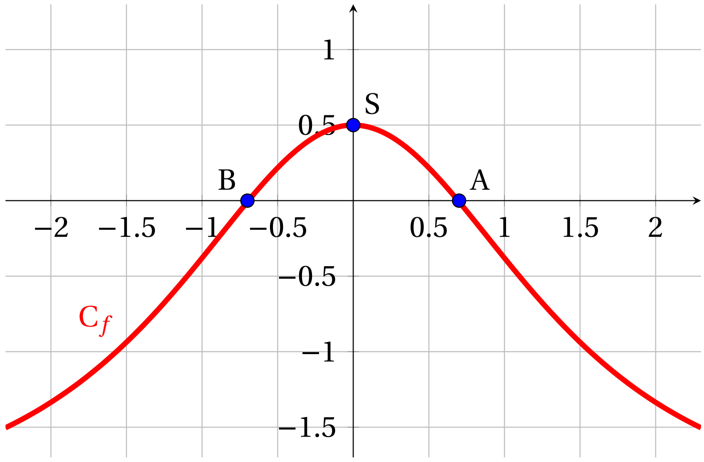
D'après la calculatrice, on obtient $u_{49} \approx 0,0102$ et $u_{50} \approx 0,00995$

donc $\boxed{n_0 = 50}$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2 + \dfrac{5e^x}{e^{2x}+1}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B (admis).



Les questions **1.** et **2.** sont indépendantes.

1. (a) Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{5e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$.

La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne prend que des valeurs strictement positives, alors la fonction $x \longmapsto e^{2x}+1$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$

On a $f = -2 + \dfrac{u}{v}$ et $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u(x) = 5e^x$ et $u'(x) = 5e^x$

$v(x) = e^{2x}+1$ et $v'(x) = 2e^{2x}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{5e^x\left(e^{2x}+1\right) - 2e^{2x} \times 5e^x}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \dfrac{5e^x\left(e^{2x}+1-2e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \dfrac{5e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$

Donc $\boxed{\text{Pour tout réel } x, \quad f'(x) = \dfrac{5e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}}$

(b) Étudier les variations de la fonction f sur $]-\infty;\ +\infty[$.

Pour tout réel X, on sait $e^X > 0$ pour tout réel x, $5e^x > 0$ et $\left(e^{2x}+1\right)^2 > 0$

D'où $\dfrac{5e^x}{\left(e^{2x}+1\right)^2} > 0$

Alors $f'(x)$ est du même signe que $(1-e^{2x})$.

De plus $1 - e^{2x} \geq 0 \iff e^0 \geq e^{2x} \iff 0 \geq 2x \iff 0 \geq x$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		∞
signe de $1-e^{2x}$		$+$	0	$-$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

Et $f(0)=-2+\dfrac{5\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^{2\times 0}+1}=-2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}$

Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est croissante sur }]-\infty;0] \text{ puis déccroissante sur } [0;+\infty[}$

(c) Justifier que pour tout réel x, $-2<f(x)\leq\dfrac{1}{2}$.

- D'après le 1.(b), on constate que la fonction f admet un maximum en 0 qui vaut $\dfrac{1}{2}$

Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\leq\dfrac{1}{2}$.

- De plus $f(x)=-2+\dfrac{5\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$

Or pour tout $x\in\mathbb{R}$: $5e^x>0$ et $e^{2x}+1\geq 1>0$ d'où $\dfrac{5e^x}{e^{2x}+1}>0$

D'où $-2+\dfrac{5e^x}{e^{2x}+1}>-2$ c'est à dire $f(x)>-2$

Donc $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ -2<f(x)\leq\dfrac{1}{2}.}$

(d) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une unique tangente horizontale en un point S dont on précisera les coordonnées.

On sait que $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale en $t\in\mathbb{R}$ si et seulement si $f'(t)=0$

Or pour tout $t\in\mathbb{R}$, $e^t>0$ et $e^{2t}+1>0$.

Ainsi $f'(t)=0 \Leftrightarrow \dfrac{5\mathrm{e}^t\left(1-\mathrm{e}^{2t}\right)}{\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right)^2} \Leftrightarrow 1-e^{2t}=0 \Leftrightarrow e^{2t}=1 \Leftrightarrow e^{2t}=e^0 \Leftrightarrow t=0$

Et $f(0)=-2+\dfrac{5\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^{2\times 0}+1}=-2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}$

Donc $\boxed{\mathscr{C} \text{ admet une unique tangente horizontale en un point S}\left(0;\dfrac{1}{2}\right)}$

2. On désigne par a l'abscisse du point A, par b l'abscisse du point B et on pose $s = \mathrm{e}^a$ et $t = \mathrm{e}^b$, par définition $a > b$.

(a) Résoudre l'équation $2X^2 - 5X + 2 = 0$.

On résoud $2X^2 - 5X + 2 = 0$.

On a $\Delta = 9$ et $X_1 = \dfrac{1}{2}$ et $X_2 = 2$.

Sonc $\boxed{S = \left\{\dfrac{1}{2}; 2\right\}}$

(b) Démontrer que s est une solution de l'équation $2X^2 - 5X + 2 = 0$. On admettra que t est aussi solution de cette équation.

On sait que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points A et B

et que a désigne l'ascisse du point A

Donc a est une solution de l'équation $f(t) = 0$.

Comme $f(a) = 0$,

alors $-2 + \dfrac{5\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^{2a}+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{5\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^{2a}+1} = 2 \quad \Rightarrow \quad 5\mathrm{e}^a = 2(\mathrm{e}^{2a}+1)$

$\Rightarrow \quad 5\mathrm{e}^a - 2\mathrm{e}^{2a} - 2 = 0$ et comme $s = \mathrm{e}^a$

$\Rightarrow \quad 5s - 2s^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2s^2 - 5s + 2 = 0$

Donc $\boxed{s \text{ est une solution de l'équation } 2X^2 - 5X + 2 = 0}$

(c) En déduire les valeurs de s et t.

On sait des questions précédentes que :

- l'équation $2X^2 - 5X + 2 = 0$ admet deux solutions $\dfrac{1}{2}$ et 2
- s et t sont solution de l'équation $2X^2 - 5X + 2 = 0$

De plus $b < a$ alors $e^b < e^a$ puisque la fonction exponentielle est strictement croissante

C'est à dire $t < s$ puisque $t = e^b$ et $s = e^a$

Donc $\boxed{t = \dfrac{1}{2} \text{ et } s = 2.}$

(d) Justifier que $a = -b$.

On sait que $s = 2$ et $t = \dfrac{1}{2}$ alors $e^a = 2$ et $e^b = \dfrac{1}{2}$

Alors $e^b = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$

Donc $\boxed{b = -a.}$

On pouvait aussi résonner sur la parité de f.

Comme f est définie sur $\mathbb{R}$ avec l'intervalle est bien centré en zéro

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = -2 + \frac{5e^{-x}}{e^{-2x}+1} = -2 + \frac{5\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^{2x}}+1} = -2 + \frac{\frac{5}{e^x}}{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}} = -2 + \frac{\frac{5e^{2x}}{e^x}}{1+e^{2x}} = -2 + \frac{5e^x}{1+e^{2x}} = f(x)$$

La fonction f est paire sur $\mathbb{R}$, on peut alors conclure que $\boxed{\text{a=-b}}$