EPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

MATHEMATIQUES

Jeudi 27 janvier 2022

DUREE DE L'EPREUVE : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Aucun prêt entre les candidats

Le candidat doit traiter les 4 exercices qui sont indépendants les uns des autres.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7 dont une page d'annexe (page 7) qui est à rendre avec la copie.

Exercice 1. 4,5 points

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :

- R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
- J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus », calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.
3. Quelle probabilité faudrait-il avoir, au centième près, pour que le nombre de bouteilles « pur jus » soit supérieur ou égal à 200 avec une probabilité supérieure à $0,9$ toujours dans un échantillon de 500 ?

Exercice 2. 5 points

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t est exprimé en heures.
Une entreprise congèle des ailerons de poulet dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets.
À l'instant $t=0$, les ailerons, à une température de 5 °C, sont placés dans le tunnel. Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à -24°C.

Partie A

La température des ailerons dans le tunnel de congélation est modélisée en fonction du temps t par la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(t)=35\mathrm{e}^{-1,6t}-30$.

1. Déterminer la température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes, soit 0,5 h.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f.
3. Si les ailerons de poulet sont laissés une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des ailerons sera-t-elle conforme au cahier des charges ?
4. Résoudre par le calcul l'équation $f(t)=-24$ et interpréter le résultat trouvé.

Partie B

Pour moderniser son matériel, l'entreprise a investi dans un nouveau tunnel de congélation.
La température des ailerons dans ce nouveau tunnel est modélisée, en fonction du temps, par une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$, qui est solution de l'équation différentielle $y'+1,5y=-52,5$

1. (a) Résoudre sur $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation différentielle $y'+1,5y=0$.
   (b) Résoudre sur $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation différentielle $y'+1,5y=-52,5$.
2. (a) Justifier que $g(0)=5$.
   (b) Vérifier que la fonction g est définie par $g(t)=40\mathrm{e}^{-1,5t}-35$.
3. Dans ce tunnel, à partir de combien de temps, la températures des ailerons sera-elle inférieure à -24°C ?

Exercice 3. 7,5 points

Partie A : Étude préliminaire

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $]-3\ ;\ +\infty[$

x	-3		-2		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \ln[g(x)]$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en (-2) et la limite de f en $+\infty$
3. Donner le tableau de variations complet de la fonction f.

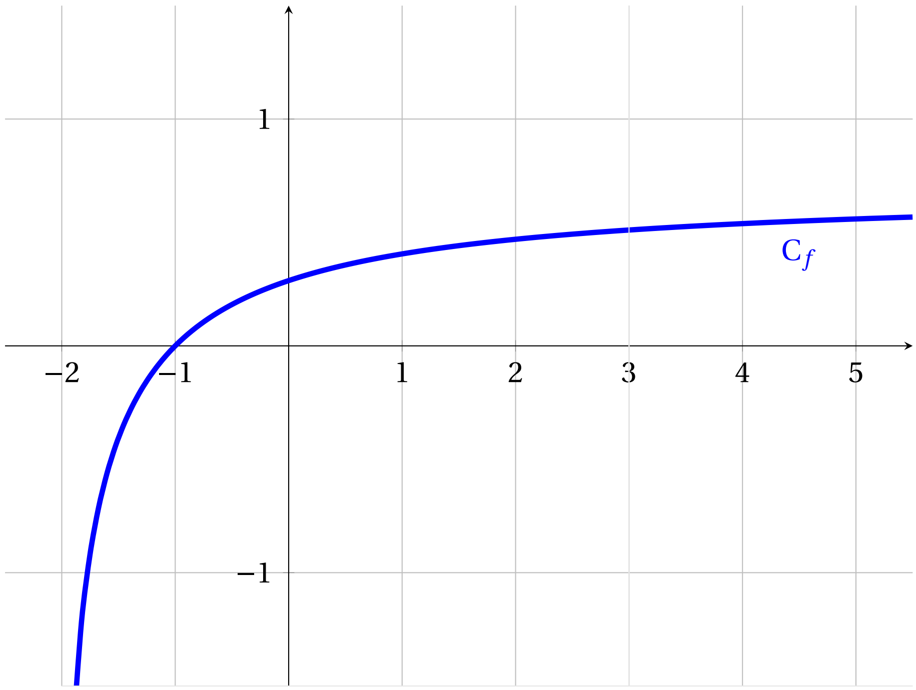
Partie B

Dans cette partie, la fonction g est la fonction définie sur l'intervalle $]-3\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 2 - \dfrac{2}{x+3}$.

1. En utilisant cette définition de la fonction g retrouver tous les renseignements donnés dans le tableau de variation de la partie A.
2. Comme dans la première question de la partie A, on définit la fonction f par :

$$\text{pour tout } x \text{ élément de l'intervalle }]-2\ ;\ +\infty[,\ f(x) = \ln\left(2 - \frac{2}{x+3}\right)$$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de cette fonction f relativement à un repère orthogonal. La courbe $(\mathscr{C}_f)$ est représentée ci-dessous.



(a) i. Montrer que pour tout x élément de l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+4}{x+3}\right)$

ii. La courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet-elle des asymptotes ? Justifier.

Si oui, en donner des équations et les tracer sur la figure fournie en annexe.

(b) La courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un point A. En utilisant l'expression de $f(x)$, déterminer les coordonnées du point A et placer ce point sur la figure fournie en annexe.

(c) i. Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.

ii. Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en son point d'abscisse (-1). Tracer la droite (T) sur la figure fournie en annexe.

Exercice 4. 3 points

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère les points : $A(1\ ;\ 2\ ;\ 5)$, $B(-1\ ;\ 6\ ;\ 4)$, $C(7\ ;\ -10\ ;\ 8)$, $D(-1\ ;\ 3\ ;\ 4)$ et $E(-1\ ;\ -2\ ;\ 3)$.

Proposition 1 : Les points A, B et C définissent un plan.

Proposition 2 : La droite (AE) et le plan (BCD) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Proposition 3 : Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 2 - 12t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5 + 3t \end{cases}$

Proposition 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

ANNEXE

Examen blanc de spécialité Mathématiques

du jeudi 27 janvier 2022

Nom : .... Prénom : ....