EPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

MATHEMATIQUES

Mardi 25 janvier 2022

DUREE DE L'EPREUVE : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Aucun prêt entre les candidats

Le candidat doit traiter les 4 exercices qui sont indépendants les uns des autres.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Exercice 1. 5,5 points

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les deux parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.
   (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.
   (b) Quelle est la meilleure approximation de $P(X \geqslant 400)$ parmi les nombres suivants ?

$$0,92 \qquad 0,93 \qquad 0,94 \qquad 0,95.$$

2. Quelle taille d'échantillon faut-il prévoir pour que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 300 avec une probabilité supérieure à $0,9$ avec toujours la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6 ?

Partie B : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.

L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

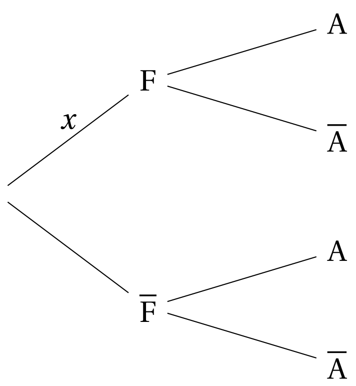
Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.

Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{\mathrm{F}}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{\mathrm{A}}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d'après les données, on a $\mathrm{P(A)} = 0,29$.

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A})$.
2. On pose $x = \mathrm{P(F)}$.
   (a) Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

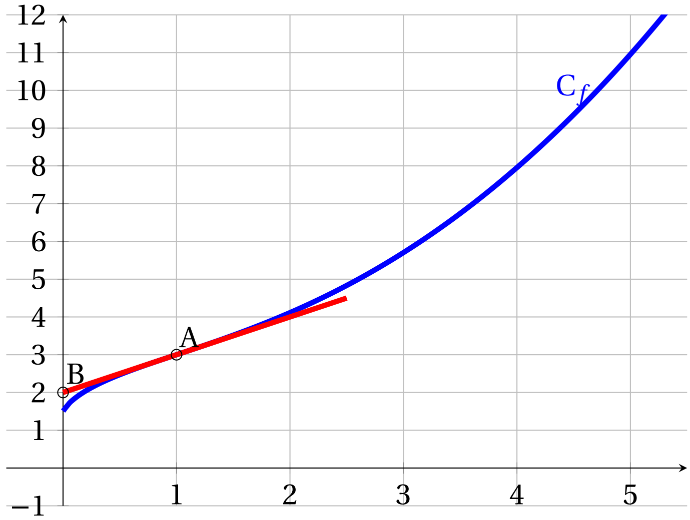


   (b) En déduire une égalité vérifiée par x.
3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

Exercice 2. 7,5 points

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;5]$.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1 et d'ordonnée 3 passe par le point B de coordonnées $(0;2)$.



Partie A - Point de vue graphique

1. On note f' la dérivée de la fonction f, déterminer $f'(1)$.
2. Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

Partie B

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;5]$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - x\ln(x) + \dfrac{3}{2}$.

1. Justifier que $f'(x) = x - \ln(x)$.
2. Calculer $f''(x)$, où f'' est la dérivée seconde de la fonction f.
3. (a) Étudier les variations de la fonction dérivée f' sur $]0;5]$.

   (b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0;5]$.
4. (a) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0;5]$.

   (b) En déduire que la position relative la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

   (c) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

   (d) Quelle inégalité peut-on en déduire ?

Partie C

Une entreprise produit et commercialise un article. Sa capacité de production quotidienne est limitée à 5 milliers d'articles.
La fonction f modélise sur l'intervalle $]0;5]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

On note $\mathrm{C_M}(x)$ le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué. Cette fonction $\mathrm{C_M}$ est définie sur l'intervalle $]0;5]$ par $\mathrm{C_M}(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
On admet que la fonction $\mathrm{C_M}$ est dérivable sur l'intervalle $]0;5]$ et on appelle $\mathrm{C'_M}$ sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\mathrm{C_M}$.
2. Calculer $\mathrm{C'_M}(x)$, et vérifier que $\mathrm{C'_M}(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;5]$.
3. Étudier les variations de la fonction $\mathrm{C_M}$ sur $]0;5]$.
4. Quel est le prix de vente d'un article en dessous duquel l'entreprise est certaine de ne pas faire de bénéfice ?

Exercice 3. 4 points

La fonte GS (graphite sphéroïdal) possède des caractéristiques mécaniques élevées et proches de celles des aciers. Une entreprise fabrique des pièces de fonte GS qui sont utilisées dans l'industrie automobile.

Ces pièces sont coulées dans des moules de sable et ont une température de $1400\,°C$ à la sortie du four. Elles sont entreposées dans un local dont la température ambiante est maintenue à une température de $30\,°C$. Ces pièces peuvent être démoulées dès lors que leur température est inférieure à $650\,°C$.

La température en degrés Celsius d'une pièce de fonte est une fonction du temps t, exprimé en heures, depuis sa sortie du four.

On admet que cette fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, est une solution sur cet intervalle de l'équation différentielle : $y' + 0,065y = 1,95$.

1. (a) Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle $y' + 0,065y = 0$.

   (b) Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle $y' + 0,065y = 1,95$.

   (c) Donner $f(0)$ et vérifier que la fonction f est définie par $f(t) = 1370\,\mathrm{e}^{-0,065t} + 30$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. (a) Étudier mathématiquement le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   (b) Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

3. La pièce de fonte peut-elle être démoulée après avoir été entreposée 5 heures dans le local ?

4. (a) Déterminer au bout de combien de temps au minimum la pièce pourra être démoulée. Arrondir le résultat à la minute près.

   (b) Pour éviter la fragilisation de la fonte, il est préférable de ne pas démouler la pièce avant que sa température ait atteint $325\,°C$.

   Dans ce cas faudra-t-il attendre exactement deux fois plus de temps que pour un démoulage à $650\,°C$? Justifier la réponse.

Exercice 4. 3 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on donne les points :

$$A(1 ; 2 ; 3), \quad B(3 ; 0 ; 1), \quad C(-1 ; 0 ; 1), \quad D(2 ; 1 ; -1), \quad E(-1 ; -2 ; 3) \quad \text{et} \quad F(-2 ; -3 ; 4).$$

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 3 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.