EPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

MATHEMATIQUES

Mardi 25 janvier 2022

DUREE DE L'EPREUVE : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Aucun prêt entre les candidats

Le candidat doit traiter les 4 exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte ????????? pages numérotées de 1 à ???????

Exercice 1. 5,5 points

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les deux parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

   (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.

   (b) Quelle est la meilleure approximation de $P(X \geqslant 400)$ parmi les nombres suivants ?

$$0,92 \qquad 0,93 \qquad 0,94 \qquad 0,95.$$

2. Quelle taille d'échantillon faut-il prévoir pour que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 300 avec une probabilité supérieure à $0,9$ avec toujours la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6 ?

Partie B : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.

L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.

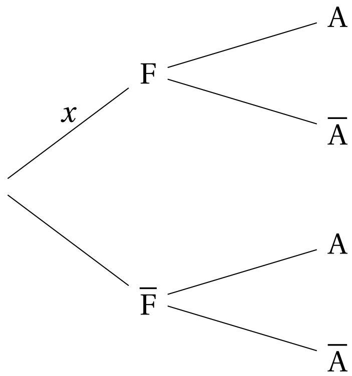
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{F}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;

- A l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{\mathrm{A}}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d'après les données, on a $\mathrm{P(A)} = 0,29$.

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A})$.
2. On pose $x = \mathrm{P(F)}$.
   (a) Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.



   (b) En déduire une égalité vérifiée par x.

3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

Correction - Baccalauréat S Centres étrangers – 10 juin 2016

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

   (a) Pour chaque personne il n'y a que deux issues possibles : répondre/ne pas répondre.
   Si de plus on fait l'hypothèse que les choix des personnes sont indépendants,
   on peut affirmer que $\boxed{\mathrm{X} \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 700 \text{ et } p = 0,6}$

   (b) On a : $\mathrm{P(X \geqslant 400)} = 1 - \mathrm{P(X < 400)} = 1 - \mathrm{P(X \leqslant 399)}$.
   La calculatrice donne $\mathrm{P(X \leqslant 399)} \simeq 0,0573$ et $\mathrm{P(X \geqslant 400)} \simeq 0,9427$.
   Donc $\boxed{\text{la meilleure valeur approchée parmi les solutions proposées est 0,94}}$

2. Quelle taille d'échantillon faut-il prévoir pour que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 300 avec une probabilité supérieure à $0,9$ avec toujours la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6 ?

   On recherche le taille de l'échantillon n tel que $p(\mathrm{Y} \geqslant 300) \geqslant 0,9$ avec Y désignant la variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et $p = 0,6$.

   On a $p(\mathrm{Y} \geqslant 300) \geqslant 0,9 \iff 1 - p(\mathrm{Y} < 300) \geqslant 0,9 \iff 1 - p(\mathrm{Y} \leqslant 299) \geqslant 0,9$

   On peut déjà affirmer que $n \leqslant 700$

   Une exploration à la calculatrice $1 - p(\mathrm{Y} \leqslant 299) \geqslant 0,9$, on trouve

   - pour $n = 523$: $1 - p(\mathrm{Y} \leqslant 299) \approx 0,898786$
   - pour $n = 524$: $1 - p(\mathrm{Y} \leqslant 299) \approx 0,907677$

   Donc il suffit donc d'interroger 524 personnes pour garantir, avec une probabilité supérieure à $0,9$, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 300

Partie B : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.
L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{\mathrm{F}}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{\mathrm{A}}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d'après les données, on a $\mathrm{P(A)} = 0,29$.

1. L'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.

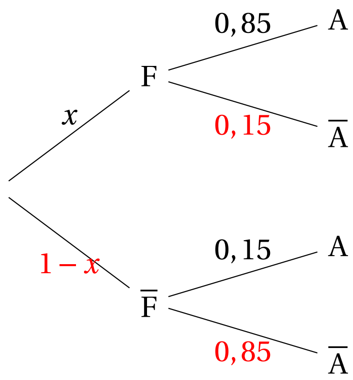
On en déduit que $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}_{\mathrm{F}}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 0,15$.

Et comme $\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}_{\mathrm{F}}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1$, on a : $\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A}) = 0,85$.

Donc $\boxed{\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{A}) = 0,15 \text{ et } \mathrm{P}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A}) = 0,85}$

2. On pose $x = \mathrm{P}(\mathrm{F})$.

   (a) On a l'arbre de probabilité ci-dessous.



   (b) D'après la formule des probabilités totales,

   $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{F}}\right)$.

   Mais $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0,29$, $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}) = 0,85x$ et $\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{F}}\right) = 0,15(1-x)$.

   On en déduit que $\boxed{x \text{ est solution de } 0,29 = 0,85x + 0,15(1-x)}$

3. Déterminons, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

   Il suffit de résoudre $0,29 = 0,85x + 0,15(1-x)$.

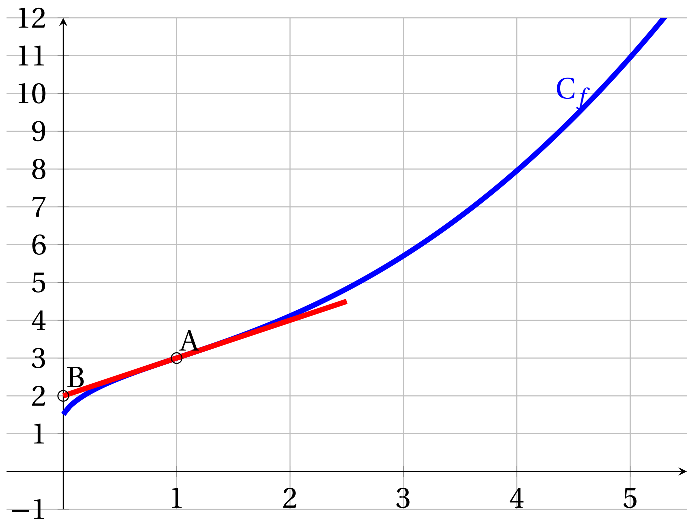
   On trouve $x = \dfrac{14}{70} = 0,2$.

   Donc $\boxed{20\,\% \text{ des personnes ayant répondu au sondage sont favorables au projet}}$

Exercice 2. 7,5 points

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;5]$.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1 et d'ordonnée 3 passe par le point B de coordonnées $(0;2)$.



Partie A - Point de vue graphique

1. On note f' la dérivée de la fonction f, déterminer $f'(1)$.
2. Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

Partie B

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;5]$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - x\ln(x) + \dfrac{3}{2}$.

1. Justifier que $f'(x) = x - \ln(x)$.
2. Calculer $f''(x)$, où f'' est la dérivée seconde de la fonction f.
3. (a) Étudier les variations de la fonction dérivée f' sur $]0;5]$.

   (b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0;5]$.
4. (a) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0;5]$.

   (b) En déduire que la position relative la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

   (c) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

   (d) Quelle inégalité peut-on en déduire ?

Partie C

Une entreprise produit et commercialise un article. Sa capacité de production quotidienne est limitée à 5 milliers d'articles.

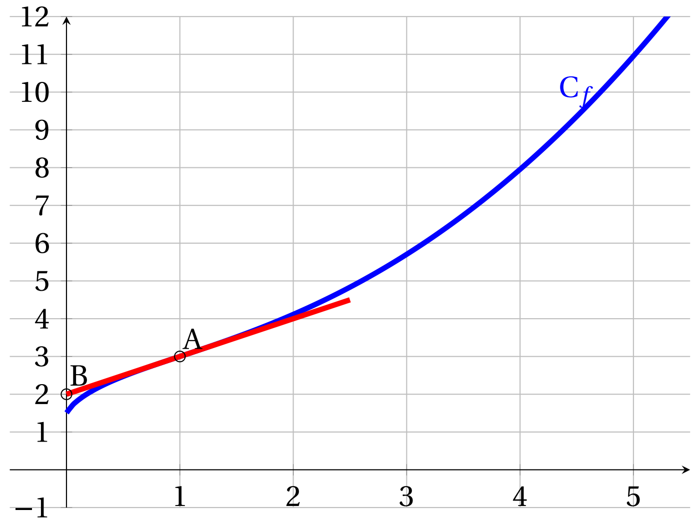
La fonction f modélise sur l'intervalle $]0;5]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

On note $\mathrm{C_M}(x)$ le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué. Cette fonction $\mathrm{C_M}$ est définie sur l'intervalle $]0;5]$ par $\mathrm{C_M}(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
On admet que la fonction $\mathrm{C_M}$ est dérivable sur l'intervalle $]0;5]$ et on appelle $\mathrm{C'_M}$ sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\mathrm{C_M}$.
2. Calculer $\mathrm{C'_M}(x)$, et vérifier que $\mathrm{C'_M}(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;5]$.
3. Étudier les variations de la fonction $\mathrm{C_M}$ sur $]0;5]$.
4. Quel est le prix de vente d'un article en dessous duquel l'entreprise est certaine de ne pas faire de bénéfice ?

Correction -

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;5]$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1 passe par le point B de coordonnées $(0;2)$.



Partie A

1. Le nombre dérivé $f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse 1.

   Or cette tangente passe par les points $A(1;3)$ et $B(0;2)$

   d'où : $f'(1) = \dfrac{2-3}{0-1} = 1$

   Ainsi $\boxed{f'(1) = 1}$

2. La courbe C_f traverse sa tangente au point A d'abscisse 1

   Donc $\boxed{\text{A est un point d'inflexion de la courbe } C_f}$

Partie B

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;5]$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - x\ln(x) + \dfrac{3}{2}$.

1. La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;5]$ par $f(x) = \frac{x^2}{2} + x - x\ln(x) + \frac{3}{2}$

   Justifier que $f'(x) = x - \ln(x)$

   Soit g la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $g(x) = x\ln(x)$

   Comme g est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables : $g = u \times v$

   d'où $g' = u'v + uv'$ avec pour tout réel x strictement positif,

   avec $u(x) = x$ et $u'(x) = 1$

   avec $v(x) = ln(x)$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

   Soit pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

   On en déduit que sur $]0\,;5]$ on a : $f'(x) = \frac{2x}{2} + 1 - (\ln(x) + 1) = x + 1 - \ln(x) - 1 = x - \ln(x)$

   Ainsi $\boxed{f' \text{ est la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle }]0;5] \text{ par } f'(x) = x - \ln(x)}$

2. Comme $f'(x) = x - \ln(x)$ sur l'intervalle $]0\,;5]$

   Alors $\boxed{f'' \text{ est la fonction définie pour tout réel } x \text{ de l'intervalle }]0;5] \text{ par } f''(x) = 1 - \frac{1}{x}}$

3. (a) Les variations de la fonction f' se déduisent du signe de sa dérivée f''.

   Or pour tout réel x de l'intervalle $]0;5]$, $f''(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

   Par conséquent sur l'intervalle $]0;5]$, $f''(x)$ dépend du signe de $x - 1$

   D'où le tableau de variation de la fonction $f'(x)$

x	0		1		5
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variation de f'	‖	↘	1	↗	

   (b) Le minimum de la fonction f' est égal à 1.

   Pour tout réel x de l'intervalle $]0;5]$, $f'(x) > 0$

   Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0;5]}$

4. (a) D'après le signe de f'' on peut en déduire la convexité de la fonction f

x	0		1		5
Signe de $f''(x)$	‖	-	0	$+$	
Convexité de f	‖	concave	|	convexe	

   Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est concave sur }]0\,;1] \text{ puis convexe sur } [1\,;5]}$

(b) Comme la fonction f est convexe sur $[1\,;5]$, cela signifie que la courbe C_f est toujours au-dessus de ces tangentes sur l'intervalle $[1\,;5]$ en particulier en 3.

(c) Une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 3 est : $y = f'(3)\times(x-3)+f(3)$

Or $f(3) = \dfrac{9}{2} + 3 - 3\ln(3) + \dfrac{3}{2} = 9 - 3\ln(3)$

Et $f'(3) = 3 - \ln(3)$

D'où $y = (3-\ln(3)) \times (x-3) + 9 - 3\ln(3) \Leftrightarrow y = (3-\ln(3)) \times x$

Donc $\boxed{\text{la tangente T à la courbe } Cf \text{ au point d'abscisse 3 a pour équation } y = (3-\ln(3))x}$

(d) Comme la courbe C_f est toujours au-dessus de ces tangentes sur l'intervalle $[1\,;5]$ en particulier en 3.

Alors $\dfrac{x^2}{2} + x - x\ln(x) + \dfrac{3}{2} \geq (3-\ln(3)) \times x$

$\dfrac{x^2}{2} + x - 3x - x\ln(x) + \ln(3)\,x + \dfrac{3}{2} \geq 0$

Donc $\boxed{\text{Sur } [1;5], \dfrac{x^2}{2} + 2x + (\ln(3) - \ln(x))\,x + \dfrac{3}{2} \geq 0}$

Partie C

Une entreprise produit et commercialise un article. Sa capacité de production quotidienne est limitée à 5 milliers d'articles.

1. C_M est la fonction définie sur l'intervalle $]0;5]$ par

   $C_M(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\frac{x^2}{2} + x - x\ln(x) + \frac{3}{2}}{x} = \dfrac{x}{2} + 1 - \ln(x) + \dfrac{3}{2x}$

   Donc $\boxed{C_M(x) = \dfrac{x}{2} + 1 - \ln(x) + \dfrac{3}{2x} \text{ sur l'intervalle }]0;5]}$

2. On sait que $C_M(x) = \dfrac{x}{2} + 1 - \ln(x) + \dfrac{3}{2x}$ sur l'intervalle $]0;5]$

   Alors $C'_M(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{2x^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2}$

   Ainsi $\boxed{C'_M \text{ est la fonction définie pour tout réel } x \text{ de l'intervalle }]0;5] \text{ par } C'_M(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2}}$

3. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;5]$, $2x^2 > 0$

   donc $C'_M(x)$ est du même signe que le polynôme du second degré $x^2 - 2x - 3$

   Le discriminant du trinôme est $\Delta = 4 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$

   $\Delta > 0$ donc le trinôme a deux racines : $x_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$

   Les variations de la fonction C_M se déduisent du signe de sa dérivée sur l'intervalle $]0;5]$

x	0		3		5
$\mathrm{C}'_{\mathrm{M}}(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variation de C_{M}	‖	$\searrow$	$3-\ln(3)$	$\nearrow$	

avec $\mathrm{C}_{\mathrm{M}}(3) = \dfrac{3}{2} + 1 - \ln 3 \ + \dfrac{3}{6} = 3 - \ln 3$

4. D'après la question pécédente, le coût moyen minimal est $\mathrm{C}_{\mathrm{M}}(3) = 3 - \ln 3 \ \approx 1,901$

   Donc $\boxed{\text{le prix de vente d'un article en dessous duquel l'entreprise est certaine de ne pas faire}}$

   $\boxed{\text{de bénéfice est } 1,91 \text{ euros}}$

Exercice 3. 4 points

La fonte GS (graphite sphéroïdal) possède des caractéristiques mécaniques élevées et proches de celles des aciers. Une entreprise fabrique des pièces de fonte GS qui sont utilisées dans l'industrie automobile.

Ces pièces sont coulées dans des moules de sable et ont une température de $1400\,°\mathrm{C}$ à la sortie du four. Elles sont entreposées dans un local dont la température ambiante est maintenue à une température de $30\,°\mathrm{C}$. Ces pièces peuvent être démoulées dès lors que leur température est inférieure à $650\,°\mathrm{C}$.

La température en degrés Celsius d'une pièce de fonte est une fonction du temps t, exprimé en heures, depuis sa sortie du four.

On admet que cette fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, est une solution sur cet intervalle de l'équation différentielle : $y' + 0,065y = 1,95$.

1. (a) Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle $y' + 0,065y = 0$.
   (b) Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle $y' + 0,065y = 1,95$.
   (c) Donner $f(0)$ et vérifier que la fonction f est définie par $f(t) = 1370\,\mathrm{e}^{-0,065t} + 30$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. (a) Étudier mathématiquement le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (b) Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?
3. La pièce de fonte peut-elle être démoulée après avoir été entreposée 5 heures dans le local ?
4. (a) Déterminer au bout de combien de temps au minimum la pièce pourra être démoulée. Arrondir le résultat à la minute près.
   (b) Pour éviter la fragilisation de la fonte, il est préférable de ne pas démouler la pièce avant que sa température ait atteint $325\,°\mathrm{C}$.

   Dans ce cas faudra-t-il attendre exactement deux fois plus de temps que pour un démoulage à $650\,°\mathrm{C}$? Justifier la réponse.

Correction - Baccalauréat STI2D STL - Métropole , La Réunion – 14 juin 2017

1. (a) On veut résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle $y' + 0,065y = 0$ ou $y' = -0,065y$

   D'après le cours, on sait que de la solution générale est de la forme $\boxed{f(t) = \mathrm{K}e^{-0,065t} \text{ avec } \mathrm{K} \in \mathbb{R}}$

   (b) On veut résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle $y' + 0,065y = 1,95$.

   D'après le 1), $y' + 0,065y = 0$ admet comme solution générale $f(t) = \mathrm{K}e^{-0,065t}$ avec $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$

   De plus, une fonction constante doit vérifier l'équation soit $0 + 0,065\mathrm{C} = 1,95$

   $$\iff \mathrm{C} = -\frac{1,95}{0,065} = 30$$

   Donc les solutions de l'équation différentielle $y' + 0,065y = 1,95$ sont les fonctions f définies $\boxed{\text{sur }]0\,;\,+\infty[\text{ par } f(t) = \mathrm{K}\,\mathrm{e}^{-0,065t} + 30 \text{ avec } \mathrm{K} \in \mathbb{R}}$.

(c) D'après le texte, la température à la sortie du four, c'est-à-dire pour $t = 0$, est de $1\,400\,°\mathrm{C}$, donc $f(0) = 1\,400$.

On cherche donc le réel K tel que $f(0) = 1400$ ce qui équivaut à $\mathrm{K}\,\mathrm{e}^{-0,065\times 0} + 30 = 1400 \iff \mathrm{K} = 1370$.

Donc la solution de l'équation différentielle vérifiant $f(0) = 0$ est la fonction f définie $\boxed{\text{sur }]0\,;\,+\infty[\text{ par } f(t) = 1\,370\,\mathrm{e}^{-0,065t} + 30.}$

2. (a) On sait que sur $]0\,;\,+\infty[$ on a $f(t) = 1\,370\,\mathrm{e}^{-0,065t} + 30$

Alors la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$

D'où $f'(t) = 1\,370 \times (-0,065)\,\mathrm{e}^{-0,065t} + 0 = -89,05\,\mathrm{e}^{-0,065t}$

Comme sur $]0\,;\,+\infty[$ $\mathrm{e}^{-0,065t} > 0$ et $-89,05 < 0$ alors $f'(t) < 0$

Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur }]0\,;\,+\infty[.}$

(b) La fonction f représente la température de la pièce après sa sortie du four ; la pièce refroidit en sortant du four donc la température diminue et donc la fonction f est décroissante.

3. On cherche la température de la pièce après avoir été entreposée 5 heures dans le local :

$$f(5) = 1\,370\,\mathrm{e}^{-0,065\times 5} + 30 \approx 1\,020 > 650$$

Donc $\boxed{\text{la pièce ne peut pas être démoulée après 5 heures.}}$

4. (a) La pièce pourra être démoulée après un temps t tel que $f(t) < 650$, on résout cette inéquation :

$$f(t) < 650 \iff 1\,370\,\mathrm{e}^{-0,065\times t} + 30 < 650 \iff 1\,370\,\mathrm{e}^{-0,065\times t} < 620 \iff \mathrm{e}^{-0,065\times t} < \frac{620}{1370} \iff -0,065t < \ln\left(\frac{620}{1370}\right) \iff t > \frac{\ln\left(\frac{620}{1370}\right)}{-0,065}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{620}{1370}\right)}{-0,065} \approx 12,20$

Donc $\boxed{\text{on pourra démouler la pièce au bout de 12,20 h soit 12 heures et 12 minutes}}$

(b) Pour éviter la fragilisation de la fonte, il est préférable de ne pas démouler la pièce avant que sa température ait atteint $325\,°\mathrm{C}$.

On résout l'inéquation $f(t) < 325$:

$$f(t) < 325 \iff 1\,370\,\mathrm{e}^{-0,065\times t} + 30 < 325 \iff 1\,370\,\mathrm{e}^{-0,065\times t} < 295 \iff \mathrm{e}^{-0,065\times t} < \frac{295}{1370} \iff -0,065t < \ln\left(\frac{295}{1370}\right) \iff t > \frac{\ln\left(\frac{295}{1370}\right)}{-0,065}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{295}{1370}\right)}{-0,065} \approx 23,63$ qui n'est pas le double de $12,20$

Donc $\boxed{\text{il ne faudra pas attendre exactement deux fois plus de temps que précédemment}}$

Exercice 4. 3 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ on donne les points :

$$A(1\ ;\ 2\ ;\ 3),\quad B(3\ ;\ 0\ ;\ 1),\quad C(-1\ ;\ 0\ ;\ 1),\quad D(2\ ;\ 1\ ;\ -1),\quad E(-1\ ;\ -2\ ;\ 3)\quad \text{et}\quad F(-2\ ;\ -3\ ;\ 4).$$

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 3 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3-2t \end{cases}$

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Correction - Inspiré de Baccalauréat S Métropole–La Réunion 20 juin 2016

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Puisque $\dfrac{-2}{2} \neq \dfrac{-2}{-2}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles.

Les points A,B et C ne sont donc pas alignés :

$\boxed{\text{L'affirmation 1 est fausse}}$

Affirmation 2 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

On pose I le milieu du segment [BC] appartient manifestement au plan (ABC), il suffit de vérifier si I appartient à la droite (EF) :

Le milieu I du segment [BC] a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B + x_C}{2}\ ;\ \frac{y_B + y_C}{2}\ ;\ \frac{z_B + z_C}{2}\right) = (1, 0, 1)$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EI}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Puisque $\overrightarrow{EI} = -2\overrightarrow{EF}$, les points E, I et F sont alignés : $I \in (EF)$

On a prouvé que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants en le milieu du segment [BC] :

$\boxed{\text{L'affirmation 2 est vraie}}$

Affirmation 3 : une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

La droite (AB) passe par A(1 ; 2 ; 3) et est dirigée par $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

$\boxed{\text{L'affirmation 3 est vraie}}$

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

• Représentation paramétrique de la droite (AB) : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

• Déterminons une représentation paramétrique de la droite (CD) :

La droite (CD) passe par C(-1 ; 0 ; 1) et est dirigée par $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite (D) est donc : $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1-2t \end{cases}$

• Déterminons $(AB) \cap (CD)$:

Résolvons pour cela le système $\begin{cases} 1+2t &=& -1+3s \\ 2-2t &=& s \\ 3-2t &=& 1-2s \end{cases} \iff \begin{cases} 2t-3s &=& -2 \\ 2t+s &=& 2 \\ 2t-2s &=& 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t &=& -2 \\ 2t &=& 2 \\ s &=& 0 \end{cases}$

Le système n'ayant pas de solution, on en déduit que les droites ne sont pas sécantes

$\boxed{\text{L'affirmation 4 est fausse}}$