EPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

MATHEMATIQUES

Jour 2

Jeudi 12 janvier 2023

DUREE DE L'EPREUVE : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Aucun prêt entre les candidats

Le candidat doit traiter les 4 exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 1 pages numérotées de 1 à 7

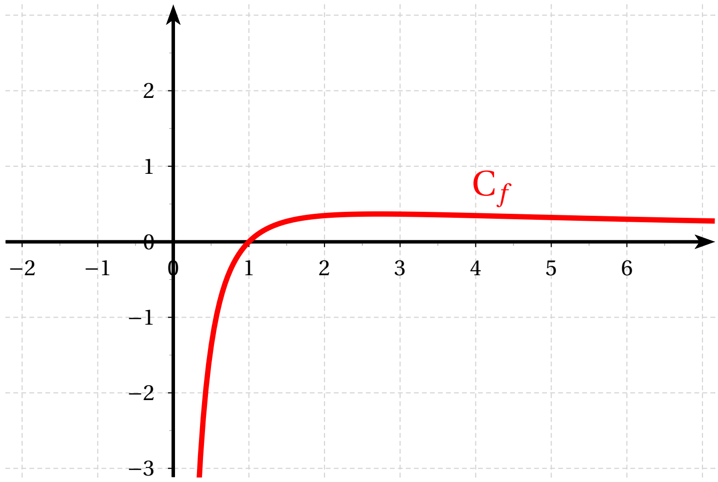
Exercice 1. 6 points

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes.

On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Partie A : Cas particulier

La courbe de f dans un repère othonormé est notée $\mathscr{C}_f$. Elle est représentée ci-dessous.



On note $\mathscr{T}_1$ la tangente de $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Le but de cette partie est d'étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{T}_1$.

1. (a) Justifier que f est dérivable et montrer que $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

   (b) Justifier que $\mathscr{T}_1$ a pour équation $y = x - 1$.

   (c) Construire $\mathscr{T}_1$ dans le repère ci-dessus.

   (d) Etablir une conjecture sur les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{T}_1$

2. On note q la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $q(x) = -\ln(x) - x^2 + 1$.

   (a) Calculer $q(1)$.

   (b) Montrer que q est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

   (c) En déduire le tableau de signe de q sur $]0;+\infty[$.

3. On note p la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $p(x) = f(x) - (x-1)$.

   (a) Montrer que p est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $p'(x) = \dfrac{q(x)}{x^2}$.

   (b) En déduire que p atteint son maximum en 1.

   (c) Déterminer le signe de p sur $]0;+\infty[$.

4. Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{T}_1$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B : Etudes des positions relatives

1. Déterminer la dérivée seconde f'' de la fonction f.

2. En déduire la convexité de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

3. Généraliser les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de ses tangentes.

Partie C : Primitives

1. Démontrer que la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2}$ est une primitive de f.

2. Résoudre l'équation $g(x) = 1$.

3. Soit $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 1$.

   Déterminer la primitive F de f vérifiant $\mathrm{F}(\alpha) = 0$.

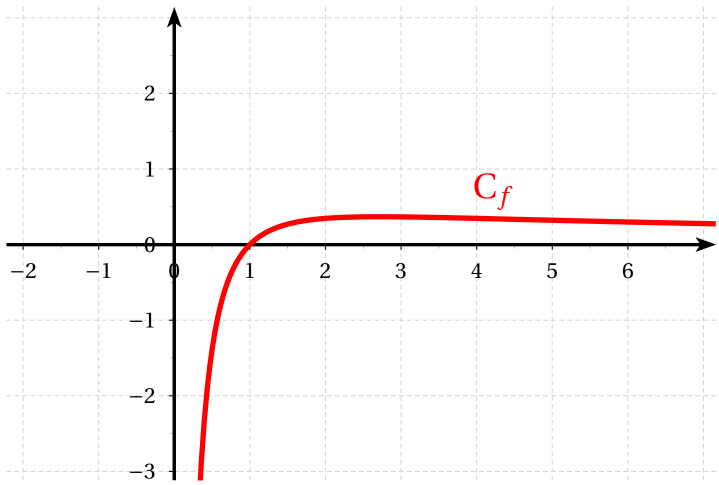
Correction

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes.

On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Partie A : Cas particulier

La courbe de f dans un repère othonormé est notée $\mathscr{C}_f$. Elle est représentée ci-dessous.



On note $\mathscr{T}_1$ la tangente de $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Le but de cette partie est d'étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{T}_1$.

1. (a) Justifier que f est dérivable et montrer que $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

   f qui est un quotient de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ est donc dérivable.

   Notons $u(x) = \ln x$ et $v(x) = x$.

   On a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$.

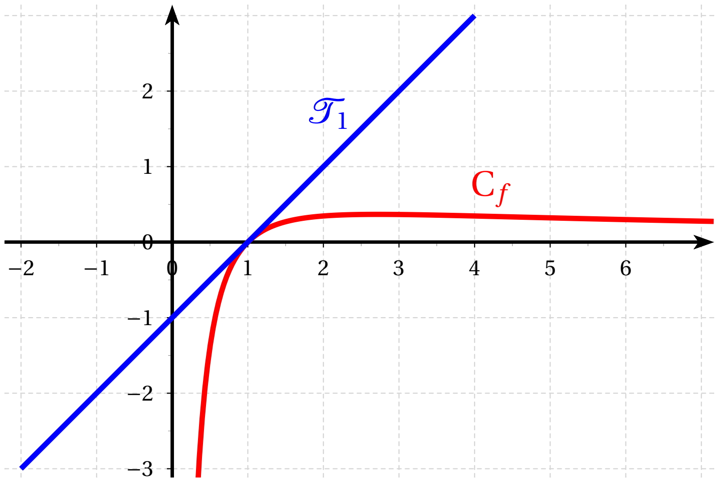
   On a $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

   Donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}}$

(b) Justifier que $\mathscr{T}_1$ a pour équation $y = x - 1$.

On a $f'(1) = \dfrac{1 - \ln 1}{1^2} = 1$ et $f(1) = \dfrac{\ln 1}{1} = 0$.
Ainsi $\mathscr{T}_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1)$
Donc $\boxed{\mathscr{T}_1 : y = x - 1}$

(c) Construire $\mathscr{T}_1$ dans le repère ci-dessus.



(d) Etablir une conjecture sur les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{T}_1$

Il semble que $\mathscr{T}_1$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$ pour tout $x > 0$.

2. On note q la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $q(x) = -\ln(x) - x^2 + 1$.

(a) Calculer $q(1)$.

$q(1) = -\ln(1) - 1^2 + 1 = -1 + 1 = 0$

(b) Montrer que q est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

q est une fonction dérivable car somme de fonctions dérivables ($-\ln$, $x \mapsto -x^2 + 1$) sur $]0;+\infty[$.
On a pour tout $x > 0$, $q'(x) = -\dfrac{1}{x} - 2x = \dfrac{-1 - 2x^2}{x}$.
Comme $-1 < 0$ et $-2x^2 \leq 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$,
on en déduit que $-1 - 2x^2 < 0$ sur $]0;+\infty[$.
Comme pour tout $x > 0$, $q(x) < 0$, on en déduit que $\boxed{q \text{ est strictement décroissante}}$

(c) En déduire le tableau de signe de q sur $]0;+\infty[$.

Comme q est strictement décroissante et que $q(1)=0$.

On a

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$q(x)$		$+$	0	$-$	

3. On note p la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $p(x)=f(x)-(x-1)$.

(a) Montrer que p est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $p'(x)=\dfrac{q(x)}{x^2}$.

f et $x\mapsto -x+1$ sont dérivable sur $]0;+\infty[$ donc p est dérivable.

Ainsi $p'(x)=f'(x)-1=\dfrac{1-\ln x-x^2}{x^2}=\dfrac{q(x)}{x^2}$.

Donc $\boxed{p'(x)=\dfrac{q(x)}{x^2}}$

(b) En déduire que p atteint son maximum en 1.

Le signe de $p(x)$ est identique au signe de $q(x)$ car $x^2>0$ sur $]0;+\infty[$.

D'après 2.(c), nous obtenons donc le signe de $p'(x)$ puis les variations de p.

x	0		1		$+\infty$
$p'(x)$		$+$	0	$-$	
p		$\nearrow$	$p(1)$	$\searrow$	

Ainsi $\boxed{p \text{ atteint son maximum en } 1}$

(c) Déterminer le signe de p sur $]0;+\infty[$.

Comme p atteint son maximum en 1 et que $p(1)=\dfrac{\ln 1}{1}-1+1=0$

On en déduit que $\boxed{p(x)\leq 0 \text{ pour tout } x>0}$

4. Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{T}_1$ sur $]0;+\infty[$.

Cela revient à étudier le signe de $f(x)-(x-1)=p(x)$. Il suffit donc d'utiliser la question 3.(c).

Comme $p(x)\leq 0$ pour tout $x>0$

On en déduit que $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est sous la tangente } \mathscr{T}_1}$.

Partie B : Etudes des positions relatives

1. Déterminer la dérivée seconde f'' de la fonction f.

On sait que $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

Alors la fonction f' est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur sur $]0;+\infty[$

On a $f' = \dfrac{u}{v}$ et $f'' = \dfrac{uv' - v'u}{v^2}$ avec $\begin{cases} u(x) = 1 - \ln x \quad \text{et} \quad u'(x) = -\dfrac{1}{x} \\ v(x) = x^2 \quad \text{et} \quad v'(x) = 2x \end{cases}$

D'où $f''(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 - \ln x)}{(x^2)^2} = \dfrac{-x - 2x + 2x\ln x)}{x^4} = \dfrac{-3x + 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{x(-3 + 2\ln x)}{x^4}$

Donc $\boxed{f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}}$

2. En déduire la convexité de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

Pour étudier la convexité de la fonction f, il faut étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0;+\infty[$

On a $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$

Comme $x \in]0;+\infty[$ alors $x^3 > 0$

Donc $f''(x)$ est du signe de $2\ln x - 3$ sur $]0;+\infty[$

Et $2\ln x - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\ln x > 3 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x > \dfrac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x > e^{\frac{3}{2}}$

D'où le signe de $f''(x)$ sur $]0;+\infty[$

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Convexité de f	‖	*concave*		*convexe*	

3. Généraliser les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de ses tangentes.

On sait que sur $\left]0; e^{\frac{3}{2}}\right]$, la fonction f est concave et sur $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$, la fonction f est convexe

alors $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de toutes ses tangentes sur } \left]0; e^{\frac{3}{2}}\right]}$

et $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de toutes ses tangentes sur } \left[e^{\frac{3}{2}};+\infty\right[}$

Partie C : Primitives

1. Démontrer que la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2}$ est une primitive de f.

   Notons $a(x) = \ln x$, on a $g'(x) = \dfrac{2a'(x)a(x)}{2} = \dfrac{1}{x}\ln x = f(x)$.

   Ainsi $\boxed{g \text{ est bien une primitive de } f}$

2. Résoudre l'équation $g(x) = 1$.

   $g(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{(\ln x)^2}{2} = 1 \Leftrightarrow (\ln x)^2 = 2 \Leftrightarrow \ln x = \sqrt{2} \text{ ou } \ln x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\sqrt{2}} \text{ ou } x = \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$

   $\boxed{\text{Les solutions sont } \mathrm{e}^{\sqrt{2}} \text{ et } \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}}$

3. Soit $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 1$.

   Déterminer la primitive F de f vérifiant $\mathrm{F}(\alpha) = 0$.

   D'après le 1., les primitives de f sont de la forme F_k avec $\mathrm{F}_k(x) = g(x) + k$.

   Pour déterminer k, on résoud :

   $\mathrm{F}_k(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) + k = 0 \Leftrightarrow 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = -1$.

   Ainsi la fonction cherchée est $\boxed{\mathrm{F}_{-1}(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2} - 1}$

Exercice 2. 5 points

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif.

L'enquête révèle que 70 % des élèves sont sensibles au développement durable, et, parmi ceux qui sont sensibles au développement durable, 80 % pratiquent le tri sélectif.

Parmi ceux qui ne sont pas sensibles au développement durable, on en trouve 10 % qui pratiquent le tri sélectif.

On interroge un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :

- S : L'élève interrogé est sensible au développement durable.
- T : L'élève interrogé pratique le tri sélectif.

Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'élève interrogé soit sensible au développement durable et pratique le tri sélectif.
3. Montrer que la probabilité $P(T)$ de l'évènement T est $0,59$.
4. On interroge un élève qui ne pratique pas le tri sélectif.

   Peut-on affirmer que les chances qu'il se dise sensible au développement durable sont inférieures à 10 % ?
5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement.

   Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves pratiquant le tri sélectif parmi les 4 élèves interrogés. Le nombre d'élèves de l'établissement est suffisamment grand pour que l'on considère que X suit une loi binomiale.

   (a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

   (b) Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne pratique le tri sélectif.

   (c) Calculer la probabilité qu'au moins deux des quatre élèves interrogés pratiquent le tri sélectif.

   (d) La probabilité qu'un élève pratiquant le tri selectif n'est plus de $0,59$, quelle devrait être la plus petite probabilité, au centième près, pour que $p(X \geq 2) \geq 0,99$ toujours avec un échantillon de 4 ?

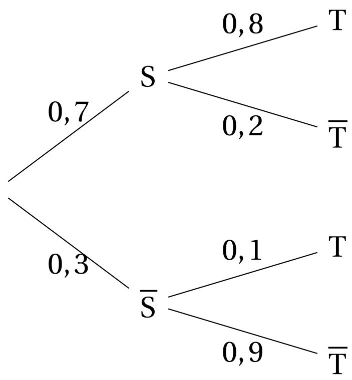
Correction

> Sujet tiré du baccalauréat ES Antilles–Guyane 24 juin 2015
> Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif. L'enquête révèle que 70 % des élèves sont sensibles au développement durable, et, parmi ceux qui sont sensibles au développement durable, 80 % pratiquent le tri sélectif.
> Parmi ceux qui ne sont pas sensibles au développement durable, on en trouve 10 % qui pratiquent le tri sélectif. On interroge un élève au hasard dans le lycée.
> On considère les évènements suivants :

S : L'élève interrogé est sensible au développement durable.

T : L'élève interrogé pratique le tri sélectif.

1. On construit un arbre pondéré décrivant la situation :



2. On doit calculer $\mathrm{P}(\mathrm{S}\cap\mathrm{T}) = \mathrm{P}(\mathrm{S}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T}) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$

   Donc l'évènement « l'élève interrogé est sensible au développement durable et pratique le tri sélectif » e

3. On sait que S et $\overline{\mathrm{S}}$ forment une partition

   D'après la formule des probabiités totales

   On obtient $\mathrm{P}(\mathrm{T}) = \mathrm{P}(\mathrm{S}\cap\mathrm{T}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{S}}\cap\mathrm{T}) = \mathrm{P}(\mathrm{S}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{S}}) \times \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{S}}}(\mathrm{T}) = 0,56 + 0,3 \times 0,1 = 0,59$

   Donc $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{T}) = 0,59}$

4. On interroge un élève qui ne pratique pas le tri sélectif.

   On évalue si cet élève est sensible au développement durable, donc on cherche $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{S})$:

   $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{S}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{S}\cap\overline{\mathrm{T}})}{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{T}})} = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{S}\cap\overline{\mathrm{T}})}{1-\mathrm{P}(\mathrm{T})} = \dfrac{0,7\times 0,2}{1-0,59} \approx 0,34$

   Les chances qu'il se dise sensible au développement durable sont de 34 %

   donc ils ne sont pas inférieures à 10 %

5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves pratiquant le tri sélectif parmi les 4 élèves interrogés.

   (a) La probabilité qu'un élève interrogé au hasard pratique le tri sélectif est 0,59. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres :

   - $n = 4$ car on interroge 4 élèves
   - $p = \mathrm{P}(\mathrm{T}) = 0,59$

   (b) $p = \mathrm{P}(\mathrm{T}) = 0,59$.

   Pour une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, la probabilité d'obtenir k succès est donnée par : $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

(c) On calcule $P(X=0)=\binom{4}{0}\times 0,59^0(1-0,59)^4=0,41^4\approx 0,03$

Donc $\boxed{\text{la probabilité qu'aucun des quatre élèves ne pratique le tri sélectif est } 0,03}$

(d) La probabilité qu'au moins deux des quatre élèves pratiquent le tri sélectif est $P(X\geqslant 2)$.

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 2)&=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\\&=\binom{4}{2}\times 0,59^2(1-0,59)^{4-2}+\binom{4}{3}\times 0,59^3(1-0,59)^{4-3}+\binom{4}{4}\times 0,59^4(1-0,59)^{4-4}\\&\approx 0{,}3511+0{,}3368+0{,}1212\approx 0,81\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser l'évènement contraire :

$P(X\geqslant 2)=1-P(X<2)=1-(P(X=0)+P(X=1))\approx 1-(0{,}0283+0{,}1627)\approx 0,81$

Ou directement la calculatrice $\boxed{P(X\geqslant 2)\approx 0,81}$

(e) On doit résoudre $p(X\geq 2)\geq 0,99 \iff 1-p(X<2)\geq 0,99$

$$\begin{aligned}&\iff 1-p(X\leq 1)\geq 0,99\\&\iff 1-0,99\geq p(X\leq 1)\\&\iff 0,01\geq p(X\leq 1)\end{aligned}$$

On rentre une fonction dans la calculatrice de la forme $f(x)=binomcdf(1,4,x)$

A l'aide du tableau de valeur, on trouve :

- $x=0,8$, $p(X\leq 1)\approx 0,0272$
- $x=0,9$, $p(X\leq 1)\approx 0,0037$

- $x=0,85$, $p(X\leq 1)\approx 0,01198$
- $x=0,86$, $p(X\leq 1)\approx 0,00982$

Donc $\boxed{\text{on trouve une probabilité de } 0,86 \text{ pour que la probabilité d'avoir au moins 2 élèves}}$

$\boxed{\text{effectuant le tri selectif soit supérieur à 99\%}}$

Exercice 3. 5 points

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100.$$

1. (a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.

   On précisera en particulier ce que représente u_n.

   (b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

   (c) On peut également utiliser le programme en Python suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.

   Recopier et compléter cet algorithme.

```
def seuil() :
    u= ..........
    n=..........
    while ............................ :
        ............................
        ............................
    return (u , n)
```

2. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

   (b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B : second modèle – avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg.
Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(t)=\dfrac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}}$ où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. (a) Calculer $f(0)$.

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f, on pourra utiliser les composées de fonctions.

2. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.

   Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t)>30$. En déduire la réponse au problème.

<u>**Correction**</u>

Sujet tiré du baccalauréat S – Asie 23 juin 2016

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante : $u_0=1000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1,2u_n-100$.

1. (a) On appelle u_n la masse, en gramme, des bactéries présentes dans la cuve, et n représente le nombre de jours depuis le début du processus.

   On a donc $u_0=1000$ puisqu'initialement, on introduit 1 kg soit 1 000 grammes de bactéries.

   D'un jour à l'autre, le nombre de bactéries augmente de 10 %, c'est donc qu'il est multiplié par $1+\dfrac{20}{100}=1,2$.

   Chaque jour, en remplaçant le milieu nutritif, on perd 100 grammes de bactéries.

   Donc, $\boxed{\text{pour tout } n,\ u_{n+1}=1,2\,u_n-100 \text{ avec } u_0=1000}$

   (b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg soit 30 000 g.

   On cherche le plus petit entier n tel que $u_n>30000$.

   À la calculatrice, on trouve $u_{22}\approx 28103$ et $u_{23}\approx 33624$

   Donc $\boxed{\text{on dépasse 30 kg de bactéries à partir de 23 jours}}$

   (c) On complète le programme :

```
def seuil() :
    u=1000
    n=0
    while u < 3000 :
        u=1.2*u-100
        n=n+1
    return (u , n)
```

2. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$ donc, $u_n = v_n + 500$.

   (a) On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2\,u_n - 100 - 500 = 1,2(v_n + 500) - 600 = 1,2\,v_n + 600 - 600 = 1,2\,v_n$

   et $v_0 = u_0 - 500 = 1\,000 - 500 = 500$

   Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 1,2 \text{ et de premier terme } v_0 = 500}$

   (b) On déduit de la question précédente que, $\boxed{\text{pour tout } n,\ v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n}$

   Comme, pour tout n, $u_n = v_n + 500$

   On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n,\ u_n = 500 + 500 \times 1,2^n}$

   (c) On sait que $1,2 > 1$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,2^n = +\infty$ et $500 > 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 500 \times 1,2^n = +\infty$

   Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 500 + 500 \times 1,2^n = +\infty$

   Pour $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

Partie B : second modèle – avec une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{50}{1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,2t}}$.

1. (a) On a $f(0) = \dfrac{50}{1 + 49\,\mathrm{e}^0} = \dfrac{50}{1 + 49} = 1$

   Donc $\boxed{f(0) = 0}$

   (b) En utilisant la composition de fonction :

   - La fonction $t \mapsto -0,2t$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-0,2t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   - On en déduit que la fonction $t \mapsto 1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,2t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,2t}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
   - On en conclut que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \text{ donc sur } [0\,;\,+\infty[}$

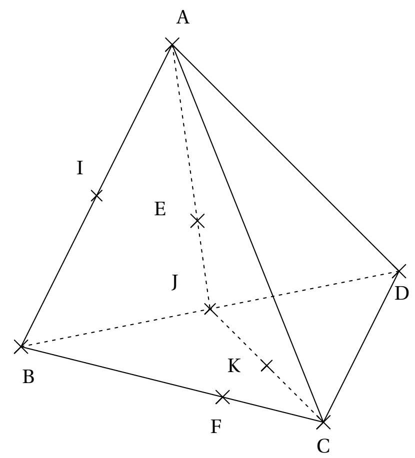
2. On résout l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$:

$$\begin{aligned}
f(t) > 30 &\iff \frac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}} > 30 \\
&\iff 50 > 30 + 30 \times 49\,\mathrm{e}^{-0,2t} \quad \text{car } 1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t} > 0 \text{ pour tout } t \\
&\iff \frac{50-30}{30\times 49} > \mathrm{e}^{-0,2t} \\
&\iff \frac{2}{147} > \mathrm{e}^{-0,2t} \\
&\iff \ln\left(\frac{2}{147}\right) > -0,2t \qquad \text{croissance de la fonction ln sur } [0\ ;\ +\infty[\\
&\iff \frac{\ln\left(\frac{2}{147}\right)}{-0,2} < t \qquad \text{division par un nombre négatif}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{2}{147}\right)}{-0,2} \approx 21,5$

Donc $\boxed{\text{la masse de bactéries dépassera 30 kg au bout de 22 jours}}$

Exercice 4. 5 points



Soient ABCD est un tétraèdre et I, J, K sont les milieux respectifs de [AB], [BD] et [JC].
ainsi que les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

<u>Méthode 1 :</u>

1. (a) Exprimer $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

   (b) Montrer que I, E et D sont alignés.

   On admettra que les points F, K et D sont alignés.

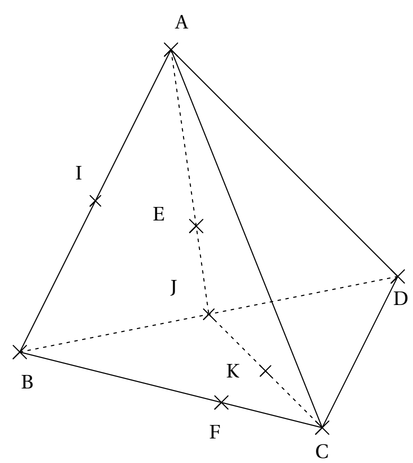
2. (a) Que peut-on dire des droites (IE) et (FK) ?

   (b) En déduire que I, E, F et K sont coplanaires.

<u>Méthode 2 : dans un repère de l'espace</u>

1. Pourquoi $(B;\ \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{BA})$ est-il un repère de l'espace ?
2. Déterminer dans ce repère les coordonnées de tous les points de la figure.
3. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{IK} = a\ \overrightarrow{IF} + b\ \overrightarrow{IE}$
4. Que peut-on en déduire pour les points I, E, K, F ?

<u>Correction</u>



Soient ABCD est un tétraèdre et I, J, K sont les milieux respectifs de [AB], [BD] et [JC].
ainsi que les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

<u>Méthode 1 :</u>

1. (a) **Exprimer $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.**

On a $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$ car $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ puisque I est le milieu de $[AB]$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

On a $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AE}$

$$
\begin{aligned}
&= \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AJ} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\ (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}) \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}
\end{aligned}
$$

$= \left(-\frac{3}{6}+\frac{4}{6}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ car $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ puisque J est le milieu de $[BD]$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} \\
&= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right) \\
&= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\
&= \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\
&= -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}
\end{aligned}
$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{ID} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IE} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}}$

(b) **Montrer que I, E et D sont alignés.**

Montrer que I, E et D sont alignés

Revient à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ID}$ **et** $\overrightarrow{IE}$ sont colinéaires

D'après la question précédente, $\overrightarrow{ID} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{IE} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

D'où $\overrightarrow{IE} = 3\ \overrightarrow{ID} - \frac{1}{6}$

Donc $\boxed{\text{les points I, E et D sont alignés}}$

On admettra que les points F, K et D sont alignés.

2. (a) **Que peut-on dire des droites (IE) et (FK) ?**

On sait que les points I, E et D sont alignés alors $D \in (IE)$

Et les points F, K et D sont alignés alors $D \in (FK)$

Donc $\boxed{\text{les droites (IE) et (FK) sont sécantes en D}}$

(b) **En déduire que I, E, F et K sont coplanaires.**

Comme les droites (IE) et (FK) sont sécantes en D

Alors les droites (IE) et (FK) sont coplanaires

D'où $\boxed{\text{les points I, E, F et K et D sont coplanaires}}$

Méthode 2 : dans un repère de l'espace

1. **Pourquoi $(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA})$ est-il un repère de l'espace ?**

   Par construction, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BA}$ ne sont pas colinéaires

   D'où $\boxed{(B;\ \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{BA}) \text{ forment bien un repère de l'espace}}$

2. **Déterminer sans justification les coordonnées de B, C, D, A dans ce repère $(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA})$.**

   On trouve d'après le repère $\boxed{B(0\ ;0\ ;0\ )\ ,\ C(1\ ;0\ ;0\ )\ ,\ D(0\ ;1\ ;0)\ \text{et}\ A(0\ ;0\ ;1)}$

3. **Déterminer, en effectuent des calculs, les coordonnées I et F dans ce repère.**

   I est le milieu du segment [AB] d'où $\begin{cases} x_J = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_J = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_J = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{0}{2} \\ y_I = \dfrac{0}{2} \\ z_I = \dfrac{0+1}{2} \end{cases}$ donc $\boxed{I\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)}$

   $\overrightarrow{BF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ d'où $\begin{cases} x_F - x_B = \dfrac{2}{3} \times (x_C - x_B) \\ y_F - y_B = \dfrac{2}{3} \times (y_C - y_B) \\ z_F - z_B = \dfrac{2}{3} \times (z_C - z_B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = \dfrac{2}{3} \times (1-0) \\ y_F = \dfrac{2}{3} \times (0-0) \\ z_F = \dfrac{2}{3} \times (0-0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = \dfrac{2}{3} \\ y_F = 0 \\ z_F = 0 \end{cases}$

   donc $\boxed{F\left(\dfrac{2}{3};0;0\right)}$

4. **Vérifier que les points J, K et E ont bien les coordonées suivantes : $J\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$; $K\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};0\right)$ et $E\left(0;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.**

   J est le milieu du segment [BD] d'où $\begin{cases} x_J = \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ y_J = \dfrac{y_B + y_D}{2} \\ z_J = \dfrac{z_B + z_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = \dfrac{0}{2} \\ y_J = \dfrac{0+1}{2} \\ z_J = \dfrac{0}{2} \end{cases}$ donc $\boxed{J\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)}$

   K est le milieu du segment [JC] d'où $\begin{cases} x_K = \dfrac{x_J + x_C}{2} \\ y_K = \dfrac{y_J + y_C}{2} \\ z_K = \dfrac{z_J + z_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = \dfrac{0+1}{2} \\ y_K = \dfrac{\frac{1}{2}+0}{2} \\ z_K = \dfrac{0+0}{2} \end{cases}$ donc $\boxed{K\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};0\right)}$

   $\overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{3}\ \overrightarrow{AJ}$ d'où $\begin{cases} x_E - x_A = \dfrac{2}{3} \times (x_J - x_A) \\ y_E - y_A = \dfrac{2}{3} \times (y_J - y_A) \\ z_E - z_A = \dfrac{2}{3} \times \left(z_J - z_A\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \dfrac{2}{3} \times (0-0) \\ y_E = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{2} - 0\right) \\ z_E - 1 = \dfrac{2}{3} \times (0-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 0 \\ y_E = \dfrac{1}{3} \\ z_E = 1 - \dfrac{2}{3} \end{cases}$

donc $\boxed{E\left(0;\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)}$

5. **Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{IK} = a\,\overrightarrow{IF} + b\,\overrightarrow{IE}$.**

D'après les coordonnées, on obtient

- $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} x_K - x_I \\ y_K - y_I \\ z_K - z_I \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 \\ \frac{1}{4} - 0 \\ 0 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix} 0 - 0 \\ \frac{1}{3} - 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

On cherche deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{IK} = a\,\overrightarrow{IF} + b\,\overrightarrow{IE}$

D'où $\begin{cases} \frac{1}{2} = a \times \frac{2}{3} + b \times 0 \\ \frac{1}{4} = a \times 0 + b \times \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} = a \times \left(-\frac{1}{2}\right) + b \times \left(-\frac{1}{6}\right) \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{2} = a \times \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} = b \times \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}a + -\frac{1}{6}b \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = a \\ \frac{1}{4} \times 3 = b \\ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}a + -\frac{1}{6}b \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3}{4} = a \\ \frac{3}{4} = b \\ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}a + -\frac{1}{6}b \end{cases}$

Et $-\frac{1}{2}a + -\frac{1}{6}b = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + -\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

Donc $a = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{3}{4}$

D'où $\boxed{\overrightarrow{IK} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{IF} + \frac{3}{4}\,\overrightarrow{IE}}$

6. **Que peut-on en déduire pour les points I, E, K et F ?**

Comme $\overrightarrow{IK} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{IF} + \frac{3}{4}\,\overrightarrow{IE}$

Alors les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IE}$

D'où les vecteurs $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IE}$ sont coplanaires

Donc $\boxed{\text{les points I, E, K et F sont coplanaires}}$