EPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

MATHEMATIQUES

Jour 1

Mercredi 11 janvier 2023

DUREE DE L'EPREUVE : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Aucun prêt entre les candidats

Le candidat doit traiter les 4 exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

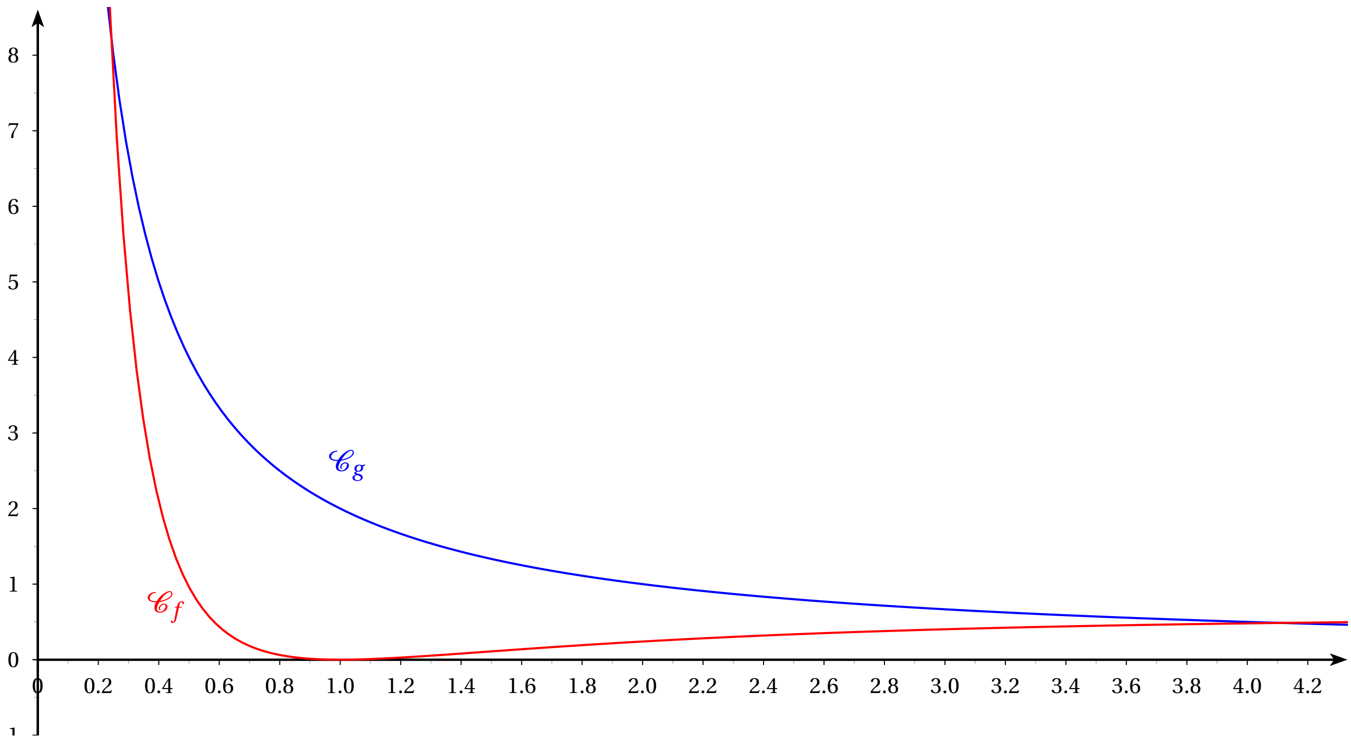
Exercice 1. 6 points

On note f et g les fonctions respectivement définies pour tout $x \in]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2}{x}$$

On note h la fonction définie pour tout $x \in]0;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

Les courbes des fonctions f et g sont respectivement représentées dans le repère ci-dessous par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Partie A : Etude de la fonction f

1. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{(2-\ln(x))\ln x}{x^2}$.
2. Déterminer les variations de la fonction f.

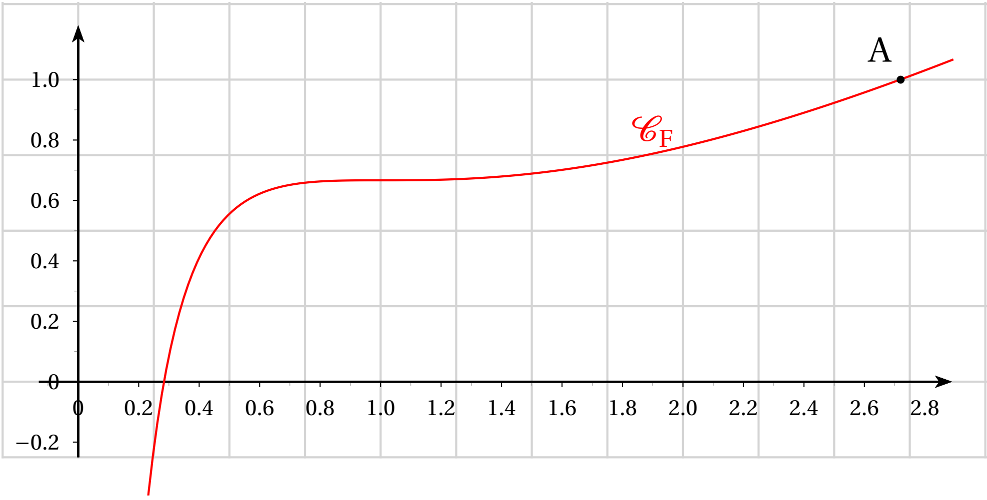
Partie B : Positions relatives

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $h(x) = \dfrac{\left(\ln x - \sqrt{2}\right)\left(\ln x + \sqrt{2}\right)}{x}$.
2. Déterminer le signe de $h(x)$ sur $]0;+\infty[$.
3. Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection I et J de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$.

Partie C : Primitives

On note p la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $p(x) = \dfrac{(\ \ln(x)\ )^3}{3}$.

1. Pourquoi toutes les primitives de f sont-elles strictement croissantes sur $]0;+\infty[$?
2. Vérifier que p est une primitive de f.
3. Déterminer la primitive F de f tel que $\mathrm{F}(\mathrm{e}) = 1$.
4. On a représenté F dans le repère ci-dessous. Sa courbe est noté $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}$.



On désigne par $\mathscr{T}_{\mathrm{e}}$ sa tangente au point d'abscisse e.

(a) Déterminer l'équation de $\mathscr{T}_{\mathrm{e}}$ au point A d'abscisse e.

En déduire que cette droite passe par l'origine du repère.

(b) Construire $\mathscr{T}_{\mathrm{e}}$ dans le repère donné en annexe.

Exercice 2. 4 points

Une grande enseigne décide d'organiser un jeu permettant de gagner un bon d'achat. Le jeu se déroule en deux étapes :

- **Étape 1** : chaque client tire au hasard une carte sur laquelle figure un nombre de 1 à 50, chaque numéro ayant la même probabilité d'être découvert ;
- **Étape 2** :
  - s'il découvre un numéro compris entre 1 et 15, il fait tourner une roue divisée en 10 secteurs de même taille dont 8 secteurs contiennent une étoile ;
  - sinon, il fait tourner une autre roue divisée elle aussi en 10 secteurs de même taille dont un seul secteur contient une étoile.

Un bon d'achat est gagné par le client si la roue s'arrête sur une étoile.

Partie A

Un client joue à ce jeu. On note :

- N l'évènement « Le client découvre un numéro entre 1 et 15 » ;
- E l'évènement « Le client obtient une étoile ».

1. (a) Justifier que $\mathrm{P(N)} = 0,3$ et que $\mathrm{P_N(E)} = 0,8$.
   (b) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le client trouve un numéro entre 1 et 15 et une étoile.
3. Justifier que la probabilité que le client gagne un bon d'achat est égale à $0,31$.
4. Le client a gagné un bon d'achat. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu un numéro entre 1 et 15 à la première étape ?

Partie B

Le montant d'un bon d'achat est de 10 euros.
Pour ce jeu, le directeur de l'hypermarché a prévu un budget de 250 euros par tranche de 100 clients y participant.
Pour vérifier que son budget est suffisant, il simule 100 fois le jeu d'un client à l'aide d'un logiciel.
On appelle X la variable aléatoire qui, à 100 jeux simulés, associe le nombre de bons d'achat gagnés. On admet que X suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres de X.
2. Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 30 clients gagnants.
3. Quel est le montant moyen de la somme totale offerte en bons d'achat ? Le budget prévisionnel est-il suffisant ?
4. La probabilité qu'un client gagne au jeu n'étant plus de $0,31$, quelle devrait être la plus grande probabilité, au centième près, pour que $p(\mathrm{X} \leq 60) \geq 0,99$ toujours avec un échantillon de 100 ?

Exercice 3. 5 points

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie orale

On note $f(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale.
Le modèle mathématique est : $f(t) = 20\mathrm{e}^{-0,1t} - 20\mathrm{e}^{-t}$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

1. Calculer la concentration initiale, au temps $t = 0$.
2. Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(t) = 20\mathrm{e}^{-t}\left(1 - 0,1\mathrm{e}^{0,9t}\right)$.
   En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

Partie B : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse.
Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20μg.L^{-1}.
On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.
Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$.

1. On définit la suite (v_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - 40$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) puis interpreter le résultat obtenu.
2. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 μg.L-$^{-1}$.
   Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

Exercice 4. 5 points

L'espace est muni d'un repère ortho normal.

Soient les droites :

- (d_1) la droite passant par $A(1;2;-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ $(\ -1\ ;\ 2\ ;\ 0\ )$.
- (d_2) la droite passant par $B(2\ ;0\ ;0)$ et $C(0\ ;1\ ;2)$.
- (d_3) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} \mathrm{x} = -2\mathrm{t} \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 \end{cases}$ avec $t \in \mathrm{R}$.
- (d_4) la droite passant par $F(\ 3\ ;\ 1\ ;\ -2)$ et parallèle à d_1.

Répondre aux questions suivantes :

1. (a) Déterminer une équation paramétrique de (d_1).

   (b) Le point $N(\ 0\ ;\ 4\ ;\ -1\ )$ appartient-il à la droite (d_1) ?
2. Déterminer une équation paramétrique de (d_2).
3. Donner un point et un vecteur directeur de (d_3).
4. Déterminer une équation paramétrique de (d_4).
5. (d_1) et (d_2) sont-elles coplanaires ?
6. (d_1) et (d_3) sont-elles coplanaires ?
7. (d_2) et (d_4) sont-elles coplanaires ? Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection E.

Annexe – Examen blanc J1 – Mercredi 11 janvier 2023

Calculatrice est autorisée

Nom : .... Prénom : ....

TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
	/ 6	/4	/5	/ 5

Exercice 1 - Partie C, question 4a)

On a représenté F dans le repère ci-dessous. Sa courbe est noté $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}$.

Construire $\mathscr{T}_{\mathrm{e}}$ dans le repère ci-dessous.