EPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

MATHEMATIQUES

Jour 1

Mercredi 11 janvier 2023

DUREE DE L'EPREUVE : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Aucun prêt entre les candidats

Le candidat doit traiter les 4 exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 1 pages numérotées de 1 à 6

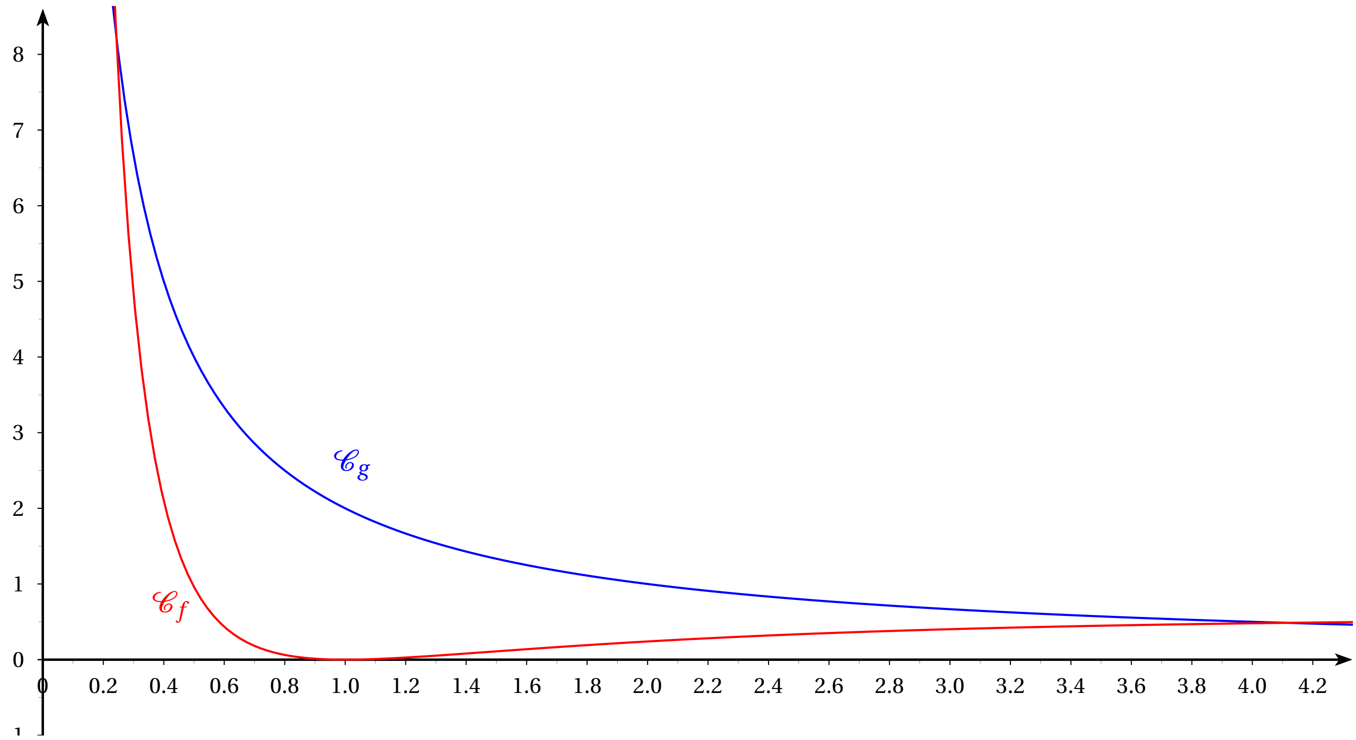
Exercice 1. 6 points

On note f et g les fonctions respectivement définies pour tout $x \in]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2}{x}$$

On note h la fonction définie pour tout $x \in]0;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

Les courbes des fonctions f et g sont respectivement représentées dans le repère ci-dessous par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Partie A : Etude de la fonction f

1. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{(2-\ln(x))\ln x}{x^2}$.
2. Déterminer les variations de la fonction f.

Partie B : Positions relatives

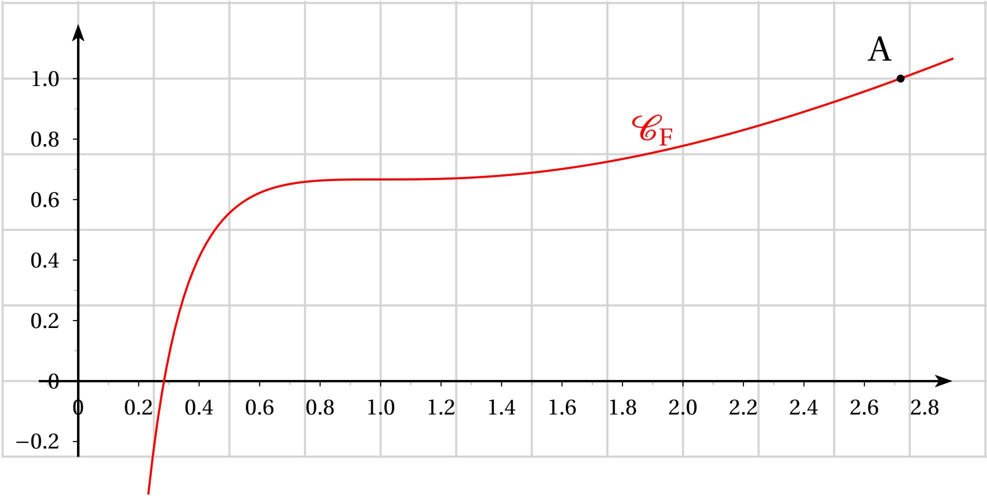
1. Montrer que pour tout $x > 0$, $h(x) = \dfrac{\left(\ln x - \sqrt{2}\right)\left(\ln x + \sqrt{2}\right)}{x}$.
2. Déterminer le signe de $h(x)$ sur $]0;+\infty[$.
3. Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection I et J de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$.

Partie C : Primitives

On note p la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $p(x) = \dfrac{(\ln(x))^3}{3}$.

1. Pourquoi toutes les primitives de f sont-elles strictement croissantes sur $]0;+\infty[$?
2. Vérifier que p est une primitive de f.

3. Déterminer la primitive F de f tel que $\mathrm{F}(\mathrm{e}) = 1$.
4. On a représenté F dans le repère ci-dessous. Sa courbe est noté $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}$.



On désigne par $\mathscr{T}_{\mathrm{e}}$ sa tangente au point d'abscisse e.

(a) Déterminer l'équation de $\mathscr{T}_{\mathrm{e}}$ au point A d'abscisse e.

En déduire que cette droite passe par l'origine du repère.

(b) Construire $\mathscr{T}_{\mathrm{e}}$ dans le repère ci-dessus.

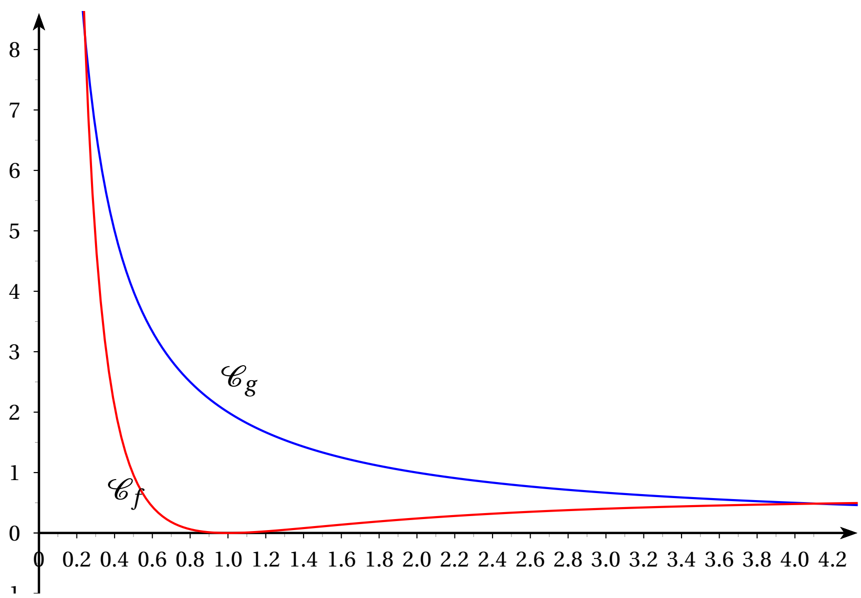
Correction

On note f et g les fonctions respectivement définies pour tout $x \in]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2}{x}$$

On note h la fonction définie pour tout $x \in]0;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

Les courbes des fonctions f et g sont respectivement représentées dans le repère ci-dessous par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Partie A : Etude de la fonction f

1. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{(2-\ln(x))\ln x}{x^2}$.

On a $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$ sur $]0;+\infty[$

Alors f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables u et v où

- $u(x) = (\ln x)^2$ $\big(u$ est le carré de la fonction dérivable $\ln\big)$
- $v(x) = x$

D eplus la fonction u est une fonction composée de $(w^2)' = 2w'w$ d'où $u'(x) = 2 \times \ln'(x)\ln(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$

et $v'(x) = 1$.

Ainsi comme $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$,

on a $f'(x) = \dfrac{\frac{2\ln x}{x}x - (\ln x)^2}{x^2} = \dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \dfrac{(2-\ln(x))\ln x}{x^2}$

Donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{(2-\ln(x))\ln x}{x^2}}$

2. Déterminer les variations de la fonction f.

On a $f'(x) = \dfrac{(2-\ln(x))\ln x}{x^2}$

Puisque $x^2 > 0$ sur $]0;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe du produit $\ln x(2-\ln(x))$.

Comme $2-\ln(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 > \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^2 > x$.

D'où le tableau de signe de $f'(x)$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$2-\ln(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
h	‖	↘	0	↗	$4\,\mathrm{e}^{-2}$	↘	

Calculs : $f(1) = \dfrac{\ln(1)^2}{1} = 0$ et $f\left(\mathrm{e}^2\right) = \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^2}{\mathrm{e}^{-2}} = \dfrac{2^2}{\mathrm{e}^{-2}} = 4\,\mathrm{e}^{-2}$

Partie B : Positions relatives

1. Montrer que pour tout $x>0$, $h(x)=\dfrac{\left(\ln x-\sqrt{2}\right)\left(\ln x+\sqrt{2}\right)}{x}$.

Pour tout $x>0$, $h(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(\ln x)^2-1}{x}=\dfrac{\left(\ln x-\sqrt{2}\right)\left(\ln x+\sqrt{2}\right)}{x}$

Donc $\boxed{\text{pour tout } x>0,\ h(x)=\dfrac{\left(\ln x-\sqrt{2}\right)\left(\ln x+\sqrt{2}\right)}{x}}$

2. Déterminer le signe de $h(x)$ sur $]0;+\infty[$.

On sait que pour tout $x>0$, $h(x)=\dfrac{\left(\ln x-\sqrt{2}\right)\left(\ln x+\sqrt{2}\right)}{x}$

Alors $\ln x-\sqrt{2}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x>\sqrt{2} \Leftrightarrow x>\mathrm{e}\sqrt{2}$.

De même $\ln x+\sqrt{2}>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$.

Ainsi nous pouvons dresser le signe de $h(x)$:

x	0		$\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$		$\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$\ln x-\sqrt{2}$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x+\sqrt{2}$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
On déterminera les coordonnées des points d'intersection I et J de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$ que l'on placera sur la figure.

Pour déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$, on utilise le signe de $h(x)=f(x)-g(x)$.

D'après B.2., on en déduit que :

- $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au dessus de } \mathscr{C}_g \text{ sur } \left[0;\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\right[\text{ et sur } \left[\mathrm{e}^{\sqrt{2}};+\infty\right[}$
- $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en dessous } \mathscr{C}_g \text{ sur } \left]\mathrm{e}^{-\sqrt{2}};\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right[}$
- $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ et } \mathscr{C}_g \text{ ont deux points d'intersection I } \left(\mathrm{e}^{-\sqrt{2}};2\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right) \text{ et J } \left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}};2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\right)}$

  En effet, $y_{\mathrm{I}}=g\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\right)=2\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ et $y_{\mathrm{J}}=g\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right)=2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$.

Partie C : Primitive

On note p la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $p(x)=\dfrac{(\ln(x))^3}{3}$.

1. Pourquoi toutes les primitives de f sont-elles strictement croissantes sur $]0;+\infty[$?

Si F est une primitive de f, alors sur $]0;+\infty[$, $F'(x) = f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x} > 0$.

Ainsi $\boxed{\text{F est strictement croissante sur }]0;+\infty[}$

2. Vérifier que p est une primitive de f.

On a $p = \dfrac{1}{3}\ln(x)^3$ donc $p'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3\ln'(x)\ln(x)^2 = \dfrac{(\ln x)^2}{x} = f(x)$

Donc $\boxed{p \text{ est une primitive de } f}$

3. Déterminer la primitive F de f tel que $F(e) = 1$.

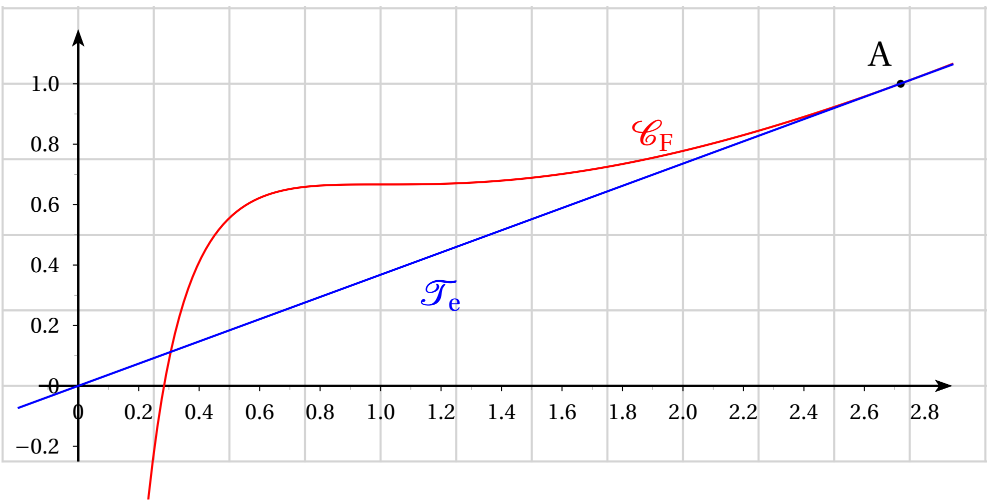
D'après C.2, F est de la forme $F(x) = p(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Comme $F(e) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p(e) + k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p(e) - 1 = -k \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(\ln(e))^3}{3} - 1 = -k$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} - 1 = -k \Leftrightarrow -\frac{2}{3} = -k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} = k.$$

Donc $\boxed{F(x) = \dfrac{(\ \ln(x)\ )^3}{3} + \dfrac{2}{3}}$

4. On a représenté F dans le repère ci-dessous. Sa courbe est noté $\mathscr{C}_F$.



On désigne par $\mathscr{T}_e$ sa tangente au point d'abscisse e.

(a) Déterminer l'équation de $\mathscr{T}_e$ au point A d'abscisse e.

En déduire que cette droite passe par l'origine du repère.

On a $F'(e) = f(e) = \dfrac{(\ln e)^2}{e} = \dfrac{1}{e} = e^{-1}$ et $F(e) = 1$

Donc $\mathscr{T}_e : y = e^{-1}(x - e) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{-1}x - 1 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{-1}x.$

C'est l'équation d'une fonction linéaire

Donc $\boxed{\mathscr{T}_e \text{ passe par l'origine}}$

(b) Construire $\mathscr{T}_{\mathrm{e}}$ dans le repère ci-dessus.

Il suffit de tracer la droite reliant l'origine du repère au point A.

Exercice 2. 4 points

Une grande enseigne décide d'organiser un jeu permettant de gagner un bon d'achat. Le jeu se déroule en deux étapes :

- **Étape 1** : chaque client tire au hasard une carte sur laquelle figure un nombre de 1 à 50, chaque numéro ayant la même probabilité d'être découvert ;
- **Étape 2** :
  - s'il découvre un numéro compris entre 1 et 15, il fait tourner une roue divisée en 10 secteurs de même taille dont 8 secteurs contiennent une étoile ;
  - sinon, il fait tourner une autre roue divisée elle aussi en 10 secteurs de même taille dont un seul secteur contient une étoile.

Un bon d'achat est gagné par le client si la roue s'arrête sur une étoile.

Partie A

Un client joue à ce jeu. On note :

- N l'évènement « Le client découvre un numéro entre 1 et 15 » ;
- E l'évènement « Le client obtient une étoile ».

1. (a) Justifier que $\mathrm{P(N)} = 0,3$ et que $\mathrm{P_N(E)} = 0,8$.

   (b) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le client trouve un numéro entre 1 et 15 et une étoile.
3. Justifier que la probabilité que le client gagne un bon d'achat est égale à $0,31$.
4. Le client a gagné un bon d'achat. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu un numéro entre 1 et 15 à la première étape ?

Partie B

Le montant d'un bon d'achat est de 10 euros.
Pour ce jeu, le directeur de l'hypermarché a prévu un budget de 250 euros par tranche de 100 clients y participant.
Pour vérifier que son budget est suffisant, il simule 100 fois le jeu d'un client à l'aide d'un logiciel.
On appelle X la variable aléatoire qui, à 100 jeux simulés, associe le nombre de bons d'achat gagnés. On admet que X suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres de X.
2. Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 30 clients gagnants.
3. Quel est le montant moyen de la somme totale offerte en bons d'achat ? Le budget prévisionnel est-il suffisant ?

4. La probabilité qu'un client gagne au jeu n'étant plus de $0,31$, quelle devrait être la plus grande probabilité, au centième près, pour que $p(\mathrm{X} \leq 60) \geq 0,99$ toujours avec un échantillon de 100 ?

Correction

Sujet tiré du Baccalauréat ES/L Antilles-Guyane 18 juin 2019

Une grande enseigne décide d'organiser un jeu permettant de gagner un bon d'achat. Le jeu se déroule en deux étapes :

- **Étape 1** : chaque client tire au hasard une carte sur laquelle figure un nombre de 1 à 50, chaque numéro ayant la même probabilité d'être découvert ;
- **Étape 2** :
  - s'il découvre un numéro compris entre 1 et 15, il fait tourner une roue divisée en 10 secteurs de même taille dont 8 secteurs contiennent une étoile ;
  - sinon, il fait tourner une autre roue divisée elle aussi en 10 secteurs de même taille dont un seul secteur contient une étoile.

Un bon d'achat est gagné par le client si la roue s'arrête sur une étoile.

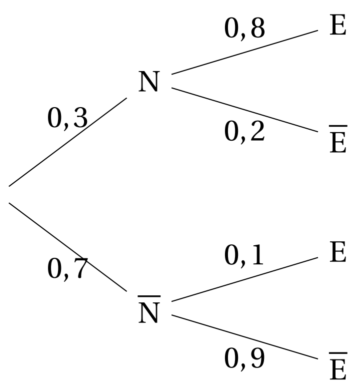
Partie A

Un client joue à ce jeu. On note :

- N l'évènement « Le client découvre un numéro entre 1 et 15 » ;
- E l'évènement « Le client obtient une étoile ».

1. (a)
   - Il y a 15 cartes avec un numéro entre 1 et 15 parmi les 30 cartes
     d'où $\boxed{\mathrm{P(N)} = \dfrac{15}{50} = \dfrac{3}{10} = 0,3}$
   - La personne a déjà une carte entre 1 et 15, alors pour gagner une étoile il y a 8 secteurs gagnanats parmi les 10
     d'où $\boxed{\mathrm{P_N(E)} = \dfrac{8}{10} = 0,8}$

   (b) Arbre pondéré modélisant la situation :



2. On doit calculer $\mathrm{P}(\mathrm{E} \cap \mathrm{N}) = \mathrm{P_N}(\mathrm{E}) \times p(\mathrm{N}) = 0,8 \times 0,3 = 0,24$

   Donc $\boxed{\text{la probabilité que le client trouve un numéro entre 1 et 15 et une étoile est 0,24}}$

3. On sait que N et $\overline{\mathrm{N}}$ forment une partition

   D'après la formule des probabiités totales

   On obtient $\mathrm{P}(\mathrm{E}) = \mathrm{P}(\mathrm{E} \cap \mathrm{N}) + \mathrm{P}(\mathrm{E} \cap \overline{\mathrm{N}})$

   $$= \mathrm{P_N}(\mathrm{E}) \times p(\mathrm{N}) + \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{N}}}(\mathrm{E}) \times \mathrm{P}(\overline{\mathrm{N}})$$

   $$= 0,24 + 0,1 \times 0,7 = 0,24 + 0,07 = 0,31$$

   Donc $\boxed{\text{la probabilité que le client gagne un bon d'achat est égale à } 0,31}$

4. Le client a gagné un bon d'achat, il a donc obtenu une étoile.

   On calcule $\mathrm{P_E}(\mathrm{N}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{E} \cap \mathrm{N})}{\mathrm{P}(\mathrm{E})} = \dfrac{0,24}{0,31} = \dfrac{24}{31}$.

   Donc $\boxed{\text{la probabilité qu'il ait obtenu un numéro entre 1 et 15 à la première étape sachant}}$

   $\boxed{\text{qu'il a gagné un bon d'achat est } \dfrac{24}{31}}$

Partie B

Le montant d'un bon d'achat est de 10 euros.

Pour ce jeu, le directeur de l'hypermarché a prévu un budget de 250 euros par tranche de 100 clients y participant. Pour vérifier que son budget est suffisant, il simule 100 fois le jeu d'un client à l'aide d'un logiciel.

On appelle X la variable aléatoire qui, à 100 jeux simulés, associe le nombre de bons d'achat gagnés. On admet que X suit une loi binomiale.

1. X suit la loi binomiale de paramètres :

   - $n = 100$ car on simule 100 fois le jeu
   - $p = \mathrm{P}(\mathrm{E}) = 0,31$

   Donc $\boxed{\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{B}(100\ ;\ 0,31)}$

2. On calcule : $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 30) = \dbinom{100}{30} \times 0,31^{30} \times 0,69^{70} \approx 0,085$

   D'après la calculatrice, $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X} = 30) \approx 0,085}$

3. Puisque X suit une loi binomiale, son espérance est $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np = 100 \times 0,31 = 31$.

   En moyenne, par lot de 100 clients, 31 sont gagnant donc gagnent 310 €.

   Il doit donc prévoir 310 € ; $\boxed{\text{la somme prévue est donc insuffisante}}$

4. On rentre une fonction dans la calculatrice de la forme $f(x) = binomcdf(60, 100, x)$

   A l'aide du tableau de valeur, on trouve :

- $x = 0,4$, $p(X \leq 60) \approx 0,999$
- $x = 0,5$, $p(X \leq 60) \approx 0,982$

- $x = 0,48$, $p(X \leq 60) \approx 0,994$
- $x = 0,49$, $p(X \leq 60) \approx 0,989$

Donc $\boxed{\text{on trouve une probabilité de } 0,49 \text{ pour que la probabilité d'avoir au plus 60 gagnants}}$ $\boxed{\text{soit supérieur à 99\%}}$

Exercice 3. 5 points

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie orale

On note $f(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale.
Le modèle mathématique est : $f(t) = 20\mathrm{e}^{-0,1t} - 20\mathrm{e}^{-t}$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

1. Calculer la concentration initiale, au temps $t = 0$.
2. Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(t) = 20\mathrm{e}^{-t}\left(1 - 0,1\mathrm{e}^{0,9t}\right)$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. (On ne demande pas la limite en $+\infty$.)
   En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

Partie B : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse.
Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20μg.L^{-1}.
On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.
Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$.

1. On définit la suite (v_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - 40$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) puis interpreter le résultat obtenu.
2. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 μg.L-$^{-1}$.
   Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

Correction

> Sujet tiré du baccalauréat S de Centres étrangers 13 juin 2017
> La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
> On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie orale

On note $f(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (µg.L^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale.
Le modèle mathématique est : $f(t) = 20\mathrm{e}^{-0,1t} - 20\mathrm{e}^{-t}$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

1. On a $f(0) = 20\mathrm{e}^{-0,1\times 0} - 20\mathrm{e}^{-0} = 20 - 20 = 0$

   Donc $\boxed{\text{la concentration plasmatique initiale est égale à : } 0 \ \mu\text{g.L}^{-1}}$

2. On a : $f(t) = 20\mathrm{e}^{-0,1t} - 20\mathrm{e}^{-t}$.

   Alors la fonction f est dérivable comme différence de fonctions dériables sur $[0\ ;\ +\infty[$

   On dérive : $f'(t) = 20 \times (-0,1)\mathrm{e}^{-0,1t} - (-20\mathrm{e}^{-t}) = 20\mathrm{e}^{-0,1t}\left(-0,1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-0,1t}}\right)$

   $= 20\mathrm{e}^{-0,1t}\left(-0,1 + \mathrm{e}^{-t+0,1t}\right) = 20\mathrm{e}^{-0,1t}\left(-0,1 + \mathrm{e}^{0,9t}\right)$

   Donc $\boxed{f(x) = 20\mathrm{e}^{-t}\left(1 - 0,1\mathrm{e}^{0,9t}\right)}$

3. On étudie le signe de f' :

   Quel que soit le réel t, $20\mathrm{e}^{-0,1t} > 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $1 - 0,1\mathrm{e}^{0,9t}$.

   - $1 - 0,1\mathrm{e}^{0,9t} > 0 \iff 1 > 0,1\mathrm{e}^{0,9t} \iff \mathrm{e}^{0,9t} < \dfrac{1}{0,1} = 10 \iff 0,9t < \ln 10 \iff t > \dfrac{\ln 10}{0,9} \approx 2,56.$
   - $g\left(\dfrac{\ln 10}{0,9}\right) \approx 13,94$

   On en déduit le tableau de variation

x	0		$\dfrac{\ln 10}{0,9}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	0	$\nearrow$	$f\left(\dfrac{\ln 10}{0,9}\right)$	$\searrow$	

   La durée après laquelle la concentration est maximale est en $\dfrac{\ln 10}{0,9}$ h

   Comme $\dfrac{\ln 10}{0,9} \approx 2,56$

   Alors $2,56h = 2h \ \ 0,56h = 2h \ \ 0,56 \times 60min = 2h \ \ 33,6min$

   Donc $\boxed{\text{la durée après laquelle la concentration est maximale est au environ 2 h 34 min}}$

Partie B : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse.
Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20µg.L^{-1}.
On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.
Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$.

1. On définit la suite (v_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - 100$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) puis interpreter le résultat obtenu.
2. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 40$ donc, $u_n = v_n + 40$.
   (a) On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,5u_n + 20 - 40 = 0,5(v_n + 40) - 20 = 0,5v_n + 20 - 20 = 0,5\,v_n$
   et $v_1 = u_1 - 40 = 20 - 40 = -20$
   Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 0,5 \text{ et de premier terme } v_1 = -20}$
   (b) On déduit de la question précédente que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = v_1 \times q^{n-1} = -20 \times 0,5^{n-1}}$
   Comme, pour tout n, $u_n = v_n + 40$
   On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 40 - 20 \times 0,5^{n-1}}$
   (c) On sait que $0,5 < 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^{n-1} = 0$ et $20 > 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 20 \times 0,5^{n-1} = 0$
   Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 40 - 20 \times 0,5^{n-1} = 40$
   Pour $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 40}$
   D'où $\boxed{\text{la concentration maximale est de 40 µg.L-}^{-1}}$
3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 µg.L-$^{-1}$.
   On cherche l'entier n minimum tel que $u_n \geqslant 38$.
   Alors
   $$\begin{aligned} u_n \geqslant 38 &\iff 40 - 20 \times 0,5^{n-1} \geqslant 38 \\ &\iff -20 \times 0,5^{n-1} \geqslant -2 \\ &\iff 0,5^{n-1} \leqslant 0,1 \\ &\iff (n-1)\ln(0,5) \leqslant \ln(0,1) \text{ (en appliquant la fonction } \ln\text{, croissante sur }]0\ ;\ +\infty[). \\ &\iff n - 1 \geqslant \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,5)} \text{ (en divisant par } \ln 0,5 \text{ qui est négatif)} \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,5)} + 1 \approx 4,3 \end{aligned}$$
   Donc $\boxed{\text{il faut au minimum 5 injections pour que la concentration plasmatique dépasse 38 µg.L-}^{-1}}$.

Exercice 4. 5 points

L'espace est muni d'un repère ortho normal.

Soient les droites :

- (d_1) la droite passant par $A(1;2;-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (-1\ ;\ 2\ ;\ 0\ )$.
- (d_2) la droite passant par $B(2\ ;0\ ;0)$ et $C(0\ ;1\ ;2)$.
- (d_3) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1+4t \\ z = 2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- (d_4) la droite passant par $F(\ 3\ ;\ 1\ ;\ -2)$ et parallèle à d_1.

Répondre aux questions suivantes :

1. (a) Déterminer une équation paramétrique de (d_1).

   (b) Le point $N(\ 0\ ;\ -2\ ;\ 0\ )$ appartient-il à la droite (d_1) ?
2. Déterminer une équation paramétrique de (d_2).
3. Donner un point et un vecteur directeur de (d_3).
4. Déterminer une équation paramétrique de (d_4).
5. (d_1) et (d_2) sont-elles coplanaires ?
6. (d_1) et (d_3) sont-elles coplanaires ?
7. (d_2) et (d_4) sont-elles coplanaires ? Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection E.

Correction

1. (a) **Déterminer une équation paramétrique de (d_1).**

   On sait que (d_1) passe par $A(\ 1\ ;\ 2\ ;\ -1\ )$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (-1\ ;\ 2\ ;\ 0\ )$.

   donc elle admet pour représentation paramétrique $\boxed{(d_1)\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+2t \\ z = -1 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}}$

   (b) **Le point $N(0;4;-1)$ appartient-il à la droite (d_1) ?**

   On sait que $N(0;4;-1)$ et $(d_1)\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+2t \\ z = -1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Alors $N \in (d_1) \Leftrightarrow$ il existe un réel t telque $\begin{cases} x_N = 1 - t \\ y_N = 2 + 2t \\ z_N = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 - t \\ 4 = 2 + 2t \\ -1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ 2 = 2t \\ -1 = -1 \end{cases}$

Comme on trouve un unique $t = 1$

Alors $\boxed{N \in (d_1)}$

2. **Déterminer une équation paramétrique de (d_2).**

   On sait que (d_2) la droite passe par $B(2\ ;0\ ;0)$ et $C(0\ ;1\ ;2)$

   D'où $\overrightarrow{BC}(-2;1;2)$

   Donc elle admet pour représentation paramétrique $\boxed{(d_2) \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}}$

3. **Donner un point et un vecteur directeur de (d_3).**

   On sait que (d_3) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

   Donc $\boxed{(d_3) \text{ passe par } E(\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2) \text{ et elle a pour vecteur directeur } \overrightarrow{w}\ (-2;4;0)}$

4. **Déterminer une équation paramétrique de (d_4).**

   On sait que (d_4) la droite passant par $F(\ 3\ ;\ 1\ ;\ -2)$ et parallèle à (d_1)

   Or (d_4) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (\ -1\ ;\ 2\ ;\ 0\ )$.

   Comme (d_4) est parallèle à (d_1) , d'où (d_4) a aussi pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (\ -1\ ;\ 2\ ;\ 0\ )$.

   Or (d_4) passe par $F(\ 3\ ;\ 1\ ;\ -2)$

   Donc elle admet pour représentation paramétrique $\boxed{(d_4) \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 \end{cases} \quad \text{avec } t \in R}$

5. **(d_1) et (d_2) sont-elles coplanaires ?**

   On a(d_1) et (d_2) ont des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\ (\ -1\ ;\ 2\ ;\ 0\ )$ et $\overrightarrow{BC}(-2;1;2)$

   Or leurs coordonnées $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas proportionnelles

   Donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires Donc les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

   Alors deux possibilités :

- soit ces droites sont coplanaires et sécantes
- soit ces droites sont non coplanaires

Cherchons à savoir si ces droites sont sécantes, c'est-à-dire il existe un point d'intersection

Or, les coordonnées d'un point appartenant aux deux droites vérifient les deux équations paramétriques.

On résout alors : $\begin{cases} 1-t=2-2t' \\ 2+2t=t' \\ -1=2t' \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$

On note les paramètres portant des noms différents t et t' (car il n'y a pas de raison qu'ils soient égaux).

On cherche ici un couple (t, t') solution du système.

On obtient : $\begin{cases} 1-t=2-2t' \\ 2+2t=t' \\ t'=-0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t=2+1 \\ 2+2t=-0,5 \\ t'=-0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2=t \\ t=1,25 \\ t'=-0,5 \end{cases}$

Les deux premières égalités sont absurdes alors le système n'a pas de solution.

Donc (d_1) et (d_2) n'ont pas de point commun.

Par conséquent, $\boxed{(d_1)) \text{ et } (d_2) \text{ ne sont pas coplanaires}}$

6. **(d_1) et (d_3) sont-elles coplanaires ?**

   On sait que (d_1) et $(d_3))$ ont des vecteurs directeurs $\vec{u}\ (-1\ ;\ 2\ ;\ 0\ )$ et $\vec{w}\ (-2;4;0)$

   D'où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires (

   Donc (d_1) et$(d_3))$ sont parallèles.

   Par conséquent, $\boxed{(d_1)) \text{ et } (d_3) \text{ sont coplanaires}}$

7. **(d_2) et (d_4) sont-elles coplanaires ? Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection E.**

   On sait que d_2 et d_4 ont des vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}(-2;1;2)$ et $\vec{u}\ (-1\ ;\ 2\ ;\ 0\ )$

   Et les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires Donc les droites (d_2) et $(d_4))$ ne sont pas parallèles.

   On cherche à savoir s'il existe un point d'intersection entre d_2 et d_4

   On résout alors : $\begin{cases} 2-2t=3-t' \\ t=1+2t' \\ 2t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2=3-t' \\ -1=1+2t' \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'=3-4 \\ 2t'=-2 \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'=-1 \\ t'=-1 \\ t=-1 \end{cases}$

   On note les paramètres t et t' sont ici égaux. *Ce cas est rare.*

On constate que le système a une solution unique, le couple (-1 ;-1).

Donc (d_2) et $(d_4))$ sont sécantes.Par conséquent, (d_2) et $(d_4))$ sont coplanaires.

En prenant t=-1 dans l'équation paramétrique de d_2, on obtient : $\begin{cases} \text{x} = 2+2 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$

Donc $\boxed{(d_2) \text{ et } (d_4)) \text{ se coupent en E } (4\ ;\ -1\ ;\ -2)}$