Révisions - Bac blanc janvier 2021

Exercice 1.
Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}$.

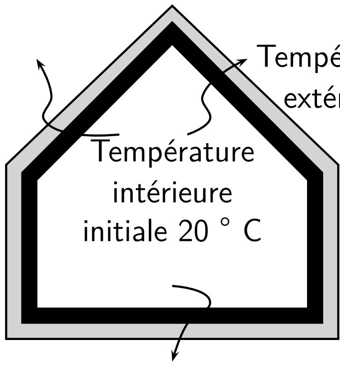
Partie A

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$.
   (a) Étudier la limite de $g(x)$ quand x tend vers 1.
   (b) Calculer $g'(x)$ pour $x\in]1\ ;\ +\infty[$.
   (c) Résoudre dans l'intervalle $x\in[1\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $1-\ln(x-1)>0$.
   (d) Étudier le sens de variation de g sur $]1\ ;\ +\infty[$.
   (e) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique, notée α, dans l'intervalle $[e+1\ ;\ e^3+1]$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]1\ ;\ +\infty[$.
2. φ est la fonction définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $\varphi(x)=\dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$.
   (a) Étudier la limite de φ en 1 et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.
   (b) Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g\left(x^2\right)$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   (c) Montrer que φ est croissante sur $\left]1\ ;\ \sqrt{\alpha}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt{\alpha}\ ;\ +\infty\right[$

Partie B

1. Vérifier que pour tout $x\in]0\ ;\ +\infty[$, $f(x)=\varphi\left(e^x\right)$.
2. En déduire :
   (a) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
   (b) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)$.
3. Montrer que, pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f(x)\leqslant\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

Exercice 2.



Température extérieure T
En plein hiver, en Europe, une maison est chauffée à 20 oC.
La température extérieure est notée T .
Dans tout l'exercice, on suppose que T < 20 .
Température intérieure initiale 20 oC
Lorsque le chauffage est coupé, la température intérieure diminue par perte de chaleur.

On modélise cette situation par une suite (u_n) dont le terme général u_n désigne la température intérieure de la maison n heures après la coupure du chauffage.
Pour une maison en maçonnerie traditionnelle et une température extérieure T constante, on admet que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,99u_n + \frac{\mathrm{T}}{100}$ et $u_0 = 20$.
Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

On suppose que la température extérieure T est égale à 0 ° C. On a donc $\mathrm{T} = 0$.

1. Calculer les termes u_1 et u_2.
2. Montrer que, dans ce cas, la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n). Justifier.
5. (a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n < 5$.
   (b) En déduire le nombre de jours à partir duquel la température intérieure est descendue en dessous de 5 ° C.

Partie B

On suppose que la température extérieure T est égale à -15 ° C. On a donc $\mathrm{T} = -15$.

1. Montrer que, dans ce cas, la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = 0,99u_n - 0,15$ et $u_0 = 20$.
2. (a) Calculer les termes u_1 et u_2.
   (b) Dans ce cas, la suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifier la réponse.
3. On souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, le nombre d'heures à partir duquel la température intérieure devient strictement inférieure à 5 ° C. On utilise pour cela l'algorithme incomplet ci-contre dans lequel U désigne un nombre réel et N un nombre entier naturel.

```
U ← 20
N ← 0
Tant que ...
    U ← ...
    N ← ...
Fin Tant que
```

   (a) Recopier et compléter l'algorithme.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre d'heures recherché.

Exercice 3.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux batteries des voitures électriques. La charge (énergie restituable) est exprimée en kilowattheure.

Conformément à l'usage commercial, on appelle capacité la charge complète d'une batterie.

Partie A

On dispose des renseignements suivants :

Caractéristiques des bornes de recharge

Type de borne de recharge	Tension (V)	Intensité (A)
Normal	230	16
		32
Semi-rapide	400	16
		32
Rapide	400	63

Document 1

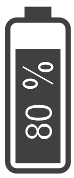
Exemples de capacités de batterie :

- Marque A : 22 kWh
- Marque B : 24 kWh
- Marque C : 33 kWh
- Marque D : 60 kWh

Document 2

Bon à savoir, pour une batterie vide

Après 50 % du temps de charge complète, la batterie est à environ à 80 % de sa capacité de charge.



Document 3

1. La puissance de charge P d'une borne de recharge, exprimée en Watt (W), s'obtient en multipliant sa tension U, exprimée en Volt (V), par son intensité I, exprimée en Ampère (A).

   Dans la pratique, on considère que le temps T de charge complète d'une batterie vide, exprimé en heure (h), s'obtient en divisant la capacité C de la batterie, exprimée usuellement en kilowattheure (kWh), par la puissance de charge P de la borne de recharge exprimée en kilowatt (kW).

   On considère une batterie de la marque D.

   Déterminer le temps de charge complète de cette batterie sur une borne de recharge « Rapide ». Exprimer le résultat en heures et minutes.

2. Lors du branchement d'une batterie vide de marque A sur une borne de recharge de type « Normal », la charge (en kWh) en fonction du temps (en heure) est modélisée par une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, solution de l'équation différentielle : $y' + 0,55y = 12,1$.

   (a) Résoudre cette équation différentielle sur $[0\,;\,+\infty[$.

   (b) Justifier que $f(0) = 0$.

   (c) Montrer que la fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(t) = -22\mathrm{e}^{-0,55t} + 22$.

(d) La durée de demi-charge est le temps nécessaire pour que la batterie soit chargée à 50 %. Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(t) = 11$ et en déduire la durée d'une demi-charge, exprimée en heure et minute.

(e) Dans la pratique, on considère que le temps de charge complète de ce type de batterie est d'environ 6 heures.

Vérifier l'affirmation du document 3.

Partie B

Une thermistance est un composant électronique dont la résistance varie en fonction de la température et qui est utilisé, entre autres, comme capteur de température.

Afin d'alerter les utilisateurs de cas de surchauffe, on munit les batteries de thermistances.

Un constructeur de thermistances indique que la valeur R, exprimée en Ohm (Ω), de la résistance de celle-ci est donnée, pour des températures θ, exprimées en degré Celsius (° C) et comprises entre 0 ° C et 120 ° C, par :

$\mathrm{R} = -0,04\theta^3 + 7,2\theta^2 - 240\theta + 3\,000.$

On considère la fonction g définie sur [0 ; 120] par : $g(x) = -0,04x^3 + 7,2x^2 - 240x + 3\,000.$

1. (a) Calculer $g'(x)$ où g' est la dérivée de g.

   (b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de g sur [0 ; 120].

   (c) En déduire la résistance maximale et la température pour laquelle elle est atteinte.

2. Un message d'alerte apparaît sur l'ordinateur de bord du véhicule lorsque la résistance atteint 5 000 Ω, ce qui signifie que la batterie est trop chaude.

   On cherche la température correspondant à cette valeur.

   (a) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement, à un degré près, de la température cherchée.

   (b) On considère l'algorithme suivant :

```
x ← 20
y ← 760
Tant que y < ...
    x ← x + 1
    y ← ...
Fin Tant que
```

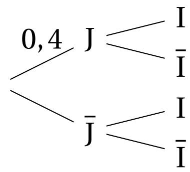
   Recopier et compléter l'algorithme pour qu'à la fin de son exécution, la variable x contienne la température cherchée.

Exercice 4.

Une société effectue auprès de 10 000 personnes une étude de marché concernant un nouveau produit. Dans cet échantillon, 40 % sont des jeunes (moins de 20 ans) et 20 % de ceux-ci se déclarent intéressés par le produit.
En revanche, 10 % seulement des personnes de plus de 20 ans se déclarent intéressés par ce produit.
On choisit au hasard une personne dans l'échantillon.
On note :

- J l'événement « La personne est jeune. »
- I l'événement « La personne est intéressée ».

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.

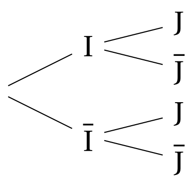


2. (a) Calculer $p(\mathrm{I} \cap \mathrm{J})$, $p(\mathrm{I} \cap \bar{\mathrm{J}})$, $p(\bar{\mathrm{I}} \cap \mathrm{J})$ et $p(\bar{\mathrm{I}} \cap \bar{\mathrm{J}})$.

   (b) Calculer $p(\mathrm{I})$.

3. (a) Calculer la probabilité que la personne ait moins de 20 ans sachant qu'elle est intéressée par le produit.

   (b) Reproduire l'arbre de probabilités ci-dessous.



Exercice 5.

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Dans cette question les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.

   On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.

   On note A l' évènement « le sac présente le défaut a » et B l'évènement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des évènements A et B sont respectivement $\mathrm{P(A)} = 0,02$ et $\mathrm{P(B)} = 0,01$; on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

   (a) Calculer la probabilité de l'évènement C « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».

   (b) Calculer la probabilité de l'évènement D « le sac est défectueux ».

   (c) Calculer la probabilité de l'évènement E « le sac ne présente aucun défaut ».

   (d) Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

2. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à $0,03$.

   On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

   (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   (b) Quelle est la probabilité de l'évènement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

   (c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

   Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.