Correction – Révisions - Bac blanc janvier 2021

Exercice 1.

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}$.

Partie A

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$.
   (a) Etudier la limite de $g(x)$ quand x tend vers 1.
   (b) Calculer $g'(x)$ pour $x\in]1\ ;\ +\infty[$.
   (c) Résoudre dans l'intervalle $x\in[1\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $1-\ln(x-1)>0$.
   (d) Etudier le sens de variation de g sur $]1\ ;\ +\infty[$.
   (e) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique, notée α, dans l'intervalle $[e+1\ ;\ e^3+1]$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]1\ ;\ +\infty[$.
2. φ est la fonction définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $\varphi(x)=\dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$.
   (a) Etudier la limite de φ en 1 et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.
   (b) Clculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g\left(x^2\right)$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   (c) Montrer que φ est croissante sur $\left]1\ ;\ \sqrt{\alpha}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt{\alpha}\ ;\ +\infty\right[$

Partie B

1. Vérifier que pour tout $x\in]0\ ;\ +\infty[$, $f(x)=\varphi\left(e^x\right)$.
2. En déduire :
   (a) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
   (b) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)$.
3. Montrer que, pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f(x)\leqslant\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

Correction : d'après Bac Centres Etrangers juin 2000

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}$.

Partie A

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$.

   (a) Limite en 1 : $\lim\limits_{x\to 1} 2x=\boxed{1}$

   Limite en $+\infty$(non demandée)

   On a une forme indéterminée.

   $\forall x,\ f(x)=x\left[1-\dfrac{x-1}{x}\times\ln(x-1)\right]$.

   $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x}=1-\dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}=1\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-\dfrac{x-1}{x}\ln(x-1)\right]=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-1)=+\infty$.

   Par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

   (b) Calculer $g'(x)$ pour $x\in]1\ ;\ +\infty[$.

   (c) $1-\ln(x-1)>0 \Leftrightarrow \ln(x-1)<1 \Leftrightarrow x-1<e^1=e \Leftrightarrow x<1+e \Leftrightarrow 1-\ln(x-1)=0 \Leftrightarrow \ln(x-1)=1$ $\Leftrightarrow x-1=e^1=e \Leftrightarrow x<1+e$.

   (d) On en déduit que g est croissante sur $[1\ ;\ +e+1]$ puis décroissante sur $[e+1\ ;\ +\infty[$

x	1		$e+1$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	$e+2$	$\searrow$	$-\infty$

   (e) Il est clair que $g(x)\neq 0$ sur $]1\ ;\ e+1]$.

      i. g est continue (somme, produit et composée de fonctions continues)

      ii. $g(e+1)=e+2>0$

      iii. $g\left(e^3+1\right)\approx -18<0$

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires , l'équation $g(x)=0$ admet une solution danas l'intervalle $\left[e+1\ ;\ e^3+1\right]$; celle-ci est unique car g est monotone sur cet intervalle. On note α cette solution.

   Signe de g :

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2. φ est la fonction définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $\varphi(x)=\dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$.

   (a) i. **Limite en 1** : $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to 1}\ln\left(x^2-1\right)=-\infty$.

   On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=-\infty}$.

ii. **Limite en** $+\infty$:

On a une forme indéterminée ; on esssaye de faire apparaître une formule de croissances comparées donc de faire apparaître la fraction $\dfrac{\ln x}{x}$.

$x^2-1 = x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc $\ln\left(x^2-1\right) = \ln\left(x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = \ln\left(x^2\right)+\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2\ln x + \ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Alors : $\boxed{\varphi(x) = 2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\times\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}$.

D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$.

$\lim\limits_{x\to=\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

donc, par produit, $\lim\limits_{x\to=\infty}\left(\dfrac{1}{x}\times\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = 0$.

On en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0}$.

(b) φ est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ comme quotient et composée de fonctions dérivables.

$\varphi = \dfrac{\ln(u)}{v}$ avec $u(x) = x^2-1$ et $v(x) = 1$.

$\varphi' = \left(\dfrac{\ln(u)}{v}\right)' = \dfrac{(\ln(u))'v-\ln(u)v'}{v^2} = \dfrac{\frac{u'}{u}v-\ln(u)v'}{v^2}$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$.

$\varphi'(x) = \dfrac{\frac{2x}{x^2-1}\times x-1\times\ln\left(x^2-1\right)}{x^2} = \boxed{\dfrac{2x^2-\left(x^2-1\right)\ln\left(x^2-1\right)}{x^2\left(x^2-1\right)}}$.

$\forall x>1$, $x^2>0$ et $x^2-1>0$ donc $\varphi'(x)$ est du signe du numérateur.

On constate que ce dénominateur, $2x^2-\left(x^2-1\right)\ln\left(x^2-1\right) = g\left(x^2\right)$.

(c) D'après le signe de g, on a $\varphi'(x)\geqslant 0$ pour $1\leqslant x^2\leqslant\alpha$ donc $1\leqslant x\leqslant\sqrt{\alpha}$ et $\varphi'(x)\leqslant 0$ pour $\alpha\leqslant x^2$, c'est-à -dire $\sqrt{\alpha}\leqslant x$.

Par conséquent : φ est croissante sur $]1\ ;\ \sqrt{\alpha}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\alpha}\ ;\ +\infty[$

Partie B

1. Pour tout $x\in]0\ ;\ +\infty$, $f(x) = \dfrac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x} = \dfrac{\ln\left(e^x\right)^2-1}{x} = \varphi\left(e^x\right)$.
2. En déduire :

(a) $\lim\limits_{x\to0}f(x) = \lim\limits_{x\to0}\varphi\left(e^x\right) = \lim\limits_{X\to1}\varphi(X) = \boxed{-\infty}$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi\left(e^x\right) = \lim\limits_{X\to+\infty}\varphi(X) = \boxed{0}$.

(c) $f = \varphi\circ w$ avec $w(x) = e^x$ donc $f' = w'\times\varphi'\circ w$ d'où $f'(x) = e^x\times\varphi'(e^x)$.

$e^x>0$ donc $f'(x)\geqslant 0$ pour $1\leqslant e^x\leqslant\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow 0<x\leqslant\ln\sqrt{\alpha}$ et $f'(x)\leqslant 0$ pour $x\geqslant\ln\sqrt{\alpha}$.

3. Le maximum de f est $f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\ln\alpha\right) = \dfrac{\ln\left(e^{\ln\alpha}\right)-1}{e^{\ln\sqrt{\alpha}}} = \dfrac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$.

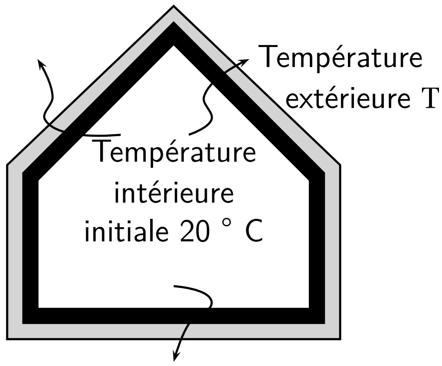
Or, par définition de α, on a $g(\alpha) = 0\Leftrightarrow 2\alpha = (\alpha-1)\ln(\alpha-1)\Leftrightarrow\ln(\alpha-1) = \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$.

On en déduit que $f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right) = \dfrac{2\alpha}{(\alpha-1)\sqrt{\alpha}} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}}$.

Tableau de variation de f :

x	0		$\ln\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$	$\searrow$	0

Exercice 2.



Température extérieure T
En plein hiver, en Europe, une maison est chauffée à 20 oC.
La température extérieure est notée T .
Dans tout l'exercice, on suppose que T < 20 .
Température intérieure initiale 20 oC
Lorsque le chauffage est coupé, la température intérieure diminue par perte de chaleur.

On modélise cette situation par une suite (u_n) dont le terme général u_n désigne la température intérieure de la maison n heures après la coupure du chauffage.
Pour une maison en maçonnerie traditionnelle et une température extérieure T constante, on admet que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,99u_n + \dfrac{\mathrm{T}}{100}$ et $u_0 = 20$.
Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

On suppose que la température extérieure T est égale à 0 ° C. On a donc $\mathrm{T} = 0$.

1. Calculer les termes u_1 et u_2.
2. Montrer que, dans ce cas, la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n). Justifier.
5. (a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n < 5$.
   (b) En déduire le nombre de jours à partir duquel la température intérieure est descendue en dessous de 5 ° C.

Partie B

On suppose que la température extérieure T est égale à -15 ° C. On a donc $\mathrm{T} = -15$.

1. Montrer que, dans ce cas, la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 0,99u_n - 0,15 \quad \text{et} \quad u_0 = 20.$$

2. (a) Calculer les termes u_1 et u_2.
   (b) Dans ce cas, la suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifier la réponse.
3.

On souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, le nombre d'heures à partir duquel la température intérieure devient strictement inférieure à 5 ° C. On utilise pour cela l'algorithme incomplet ci-contre dans lequel U désigne un nombre réel et N un nombre entier naturel.

```
U ← 20
N ← 0
Tant que ...
    U ← ...
    N ← ...
Fin Tant que
```

(a) Recopier et compléter l'algorithme.

(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre d'heures recherché.

Correction : Baccalauréat STI2D et STL/SPCL - Polynésie 19 juin 2019

Partie A

1. • $u_1 = 0,99u_0 + \frac{0}{100} = 0,99 \times 20 = 19,8$;
   • $u_2 = 0,99u_1 + \frac{0}{100} = 0,99 \times 19,8 = 19,602$
2. On a quel que soit n, $u_{n+1} = 0,99u_n$: cette relation montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,99 de premier terme $u_0 = 20$.
3. On sait que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times 0,99^n$ ou encore $u_n = 20 \times 0,99^n$.
4. Comme $0 \leqslant 0,99 < 1$, on sait que $\lim_{n\to+\infty} 0,99^n = 0$ et par conséquent $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$: la température de la pièce va se rapprocher de la température extérieure.
5. (a) On résout $u_n < 5$ ou $20 \times 0,99^n < 5$ ou $0,99^n < \frac{5}{20}$, soit $0,99^n < \frac{1}{4}$ ou $0,99^n < 0,25$.
   Par croissance de la fonction logarithme népérien il en résulte que :
   $n \ln 0,99 < \ln 0,25$ et enfin $n > \frac{\ln 0,25}{\ln 0,99}$ (car $\ln 0,99 < 0$).
   Or $\frac{\ln 0,25}{\ln 0,99} \approx 137,9$.
   (b) D'après le résultat précédent la température intérieure est descendue en dessous de 5 ° C après 140 h, soit comme $140 = 24 \times 5 + 20$ après 5 jours et 20 h, soit en arrondissant en jours : 5 jours.

Partie B

1. Avec $T = -15$ la relation de récurrence devient :

$$u_{n+1} = 0,99u_n + \frac{-15}{100} = 0,99u_n - 0,15 \quad \text{et} \quad u_0 = 20.$$

2. (a) • $u_1 = 0,99 \times u_0 - 0,15 = 0,99 \times 20 - 0,15 = 19,8 - 0,15 = 19,65$.
   • $u_2 = 0,99 \times u_1 - 0,15 = 0,99 \times 19,65 - 0,15 = 19,4535 - 0,15 = 19,3035$.
   (b) On a $\frac{u_1}{u_0} = \frac{19,65}{20} = 0,9825$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{19,3035}{19,65} \approx 0,9824$: donc il n'existe pas de réel q tel que $u_{n+1} = qu_n$: la suite (u_n) n'est pas géométrique.
3.

(a)

$U \leftarrow 20$
$N \leftarrow 0$
Tant que $U > 5$
  $U \leftarrow 0,99 \times U - 0,15$
  $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que

(b) La calculatrice donne $N = 56$ heures.

Exercice 3.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux batteries des voitures électriques. La charge (énergie restituable) est exprimée en kilowattheure.
Conformément à l'usage commercial, on appelle capacité la charge complète d'une batterie.

Partie A

On dispose des renseignements suivants :

Caractéristiques des bornes de recharge

Type de borne de recharge	Tension (V)	Intensité (A)
Normal	230	16
		32
Semi-rapide	400	16
		32
Rapide	400	63

Document 1

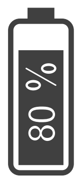
Exemples de capacités de batterie :

- Marque A : 22 kWh
- Marque B : 24 kWh
- Marque C : 33 kWh
- Marque D : 60 kWh

Document 2

Bon à savoir, pour une batterie vide

Après 50 % du temps de charge complète, la batterie est à environ à 80 % de sa capacité de charge.



Document 3

1. La puissance de charge P d'une borne de recharge, exprimée en Watt (W), s'obtient en multipliant sa tension U, exprimée en Volt (V), par son intensité I, exprimée en Ampère (A).

   Dans la pratique, on considère que le temps T de charge complète d'une batterie vide, exprimé en heure (h), s'obtient en divisant la capacité C de la batterie, exprimée usuellement en kilowattheure (kWh), par la puissance de charge P de la borne de recharge exprimée en kilowatt (kW).

   On considère une batterie de la marque D.

   Déterminer le temps de charge complète de cette batterie sur une borne de recharge « Rapide ». Exprimer le résultat en heures et minutes.

2. Lors du branchement d'une batterie vide de marque A sur une borne de recharge de type « Normal », la charge (en kWh) en fonction du temps (en heure) est modélisée par une fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, solution de l'équation différentielle : $y' + 0,55y = 12,1$.

   (a) Résoudre cette équation différentielle sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   (b) Justifier que $f(0) = 0$.

(c) Montrer que la fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(t) = -22\mathrm{e}^{-0,55t} + 22$.

(d) La durée de demi-charge est le temps nécessaire pour que la batterie soit chargée à 50 %. Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(t) = 11$ et en déduire la durée d'une demi-charge, exprimée en heure et minute.

(e) Dans la pratique, on considère que le temps de charge complète de ce type de batterie est d'environ 6 heures.

Vérifier l'affirmation du document 3.

Partie B

Une thermistance est un composant électronique dont la résistance varie en fonction de la température et qui est utilisé, entre autres, comme capteur de température.
Afin d'alerter les utilisateurs de cas de surchauffe, on munit les batteries de thermistances.
Un constructeur de thermistances indique que la valeur R, exprimée en Ohm (Ω), de la résistance de celle-ci est donnée, pour des températures θ, exprimées en degré Celsius (°C) et comprises entre 0 °C et 120 °C, par :

$\mathrm{R} = -0,04\theta^3 + 7,2\theta^2 - 240\theta + 3000$.

On considère la fonction g définie sur [0 ; 120] par : $g(x) = -0,04x^3 + 7,2x^2 - 240x + 3000$.

1. (a) Calculer $g'(x)$ où g' est la dérivée de g.

   (b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de g sur [0 ; 120].

   (c) En déduire la résistance maximale et la température pour laquelle elle est atteinte.

2. Un message d'alerte apparaît sur l'ordinateur de bord du véhicule lorsque la résistance atteint 5 000 Ω, ce qui signifie que la batterie est trop chaude.

   On cherche la température correspondant à cette valeur.

   (a) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement, à un degré près, de la température cherchée.

   (b) On considère l'algorithme suivant :

```
x ← 20
y ← 760
Tant que y < ...
    x ← x + 1
    y ← ...
Fin Tant que
```

   Recopier et compléter l'algorithme pour qu'à la fin de son exécution, la variable x contienne la température cherchée.

Correction : Baccalauréat STI2D - Antilles–Guyane 10 septembre 2019

Dans cet exercice, on s'intéresse aux batteries des voitures électriques. La charge (énergie restituable) est exprimée en kilowattheure.
Conformément à l'usage commercial, on appelle capacité la charge complète d'une batterie.

Partie A

1. La puissance de charge « Rapide /fg est égale à $400 \times 63 = 25200$ W soit 25,2 kW.
   Donc le temps de charge est égale à $\dfrac{60}{23,2} \approx 2,38$ h soit 2h et $0,38 \times 60 = 22,8$ min donc environ 2 h 23 min.
2. $$y' + 0,55y = 12,1.$$
   (a) On sait que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies sur $[0~;~+\infty[$ par :
   $f(t) = \text{K}\text{e}^{-0,55t} + \dfrac{12,1}{0,55} = \text{K}\text{e}^{-0,55t} + 22$ avec $\text{K} \in \mathbb{R}$.
   (b) Au temps $t = 0$, la batterie est déchargée donc $f(0) = 0$.
   (c) D'après la question précédente :
   $f(0) = 0 \iff \text{K}\text{e}^{-0,55\times 0} + 22 = 0 \iff \text{K} + 22 = 0 \iff \text{K} = -22$.
   Donc f est définie sur $[0~;~+\infty[$ par : $f(t) = -22\text{e}^{-0,55t} + 22$.
   (d) On a $f(t) = 11 \iff -22\text{e}^{-0,55t} + 22 = 11 \iff 11 = 22\text{e}^{-0,55t} \iff \dfrac{1}{2} = \text{e}^{-0,55t} = \iff \ln\dfrac{1}{2} = -0,55t \iff -\ln 2 = -0,55t \iff$
   $\ln 2 = 0,55t \iff t = \dfrac{\ln 2}{0,55} \approx 1,260$.
   $1,26$ h $= 1$ h et $0,26 \times 60$ min soit 15,6 min.
   Le temps de demi-charge est à peu près égal à 1 h 16 min.
   (e) Une batterie de marque A a une capacité de 22 kW. Elle sera à 80 % de sa capacité soit à $22 \times 0,80$ au bout d'un temps t tel que :
   $22 - 22\text{e}^{-0,55t} = 22 \times 0,8$, soit en simplifiant par 22 :
   $1 - \text{e}^{-0,55t} = 0,8 \iff \text{e}^{-0,55t} = 0,2$, d'où par croissance de la fonction logarithme népérien :
   $-0,55t = \ln 0,2 \iff t = \dfrac{\ln 0,2}{-0,55}$.
   Or $\dfrac{\ln 0,2}{-0,55} \approx 2,92625$ soit 1 h et $0,92625 \times 60 \approx 55,56$
   La batterie est à 80 % de sa charge à un peu moins de 3 h : le document 3 dit vrai.

Partie B

$$g(x) = -0,04x^3 + 7,2x^2 - 240x + 3000.$$

1. (a) La fonction polynôme g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $g'(x) = -0,04 \times 3x^2 + 2 \times 7,2x - 240 = -0,12x^2 + 14,4x - 240$.
   (b) La dérivée de g est un trinôme du second degré : $\Delta = 14,4^2 - 4 \times (-0,12) \times (-240) = 207,36 - 115,2 = 92,16 > 0$, avec $92,16 = 9,6^2$.
   Les racines du trinôme sont donc :
   $x_1 = \dfrac{-14,4 + 9,6}{2 \times (-0,12)} = \dfrac{4,8}{0,24} = 20$ et $x_2 = \dfrac{-14,4 - 9,6}{2 \times (-0,12)} = \dfrac{24}{0,24} = 100$.
   On sait que $g'(x) < 0$, sauf sur l'intervalle [20 ; 100] où $g'(x) \geqslant 0$.
   La fonction est donc décroissante sauf sur l'intervalle [20 ; 100] où elle est croissante, d'où le tableau de variations suivant :

x	0		20		100		120
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	3 000	$\searrow$	760	$\nearrow$	11 000	$\searrow$	8 760

(c) La résistance maximale est $g(100) = 11\,000$, obtenue à 100°.

2. (a) D'après le tableau de variations, on cherche sur l'intervalle [20 ; 100]. la calculatrice donne $g(50) = 4\,000$ et $g(60) = 5\,880$, donc la température appartient à [50 ; 60], puis $g(55) = 4\,925$ et $g(56) = 5\,114{,}6$, donc la température appartient à [55 ; 56].
Le message d'alerte apparaît sur l'ordinateur de bord du véhicule entre 55° et 56°.

(b) On considère l'algorithme suivant :

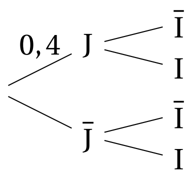
```
x ← 20
y ← 760
Tant que y < 5000
    x ← x + 1
    y ← −0,04x^3 + 7,2x^2 − 240x + 3000
Fin Tant que
```

Exercice 4.

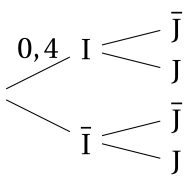
Une société effectue auprès de 10 000 personnes une étude de marché concernant un nouveau produit. Dans cet échantillon, 40 % sont des jeunes (moins de 20 ans) et 20 % de ceux-ci se déclarent intéressés par le produit.
En revanche, 10 % seulement des personnes de plus de 20 ans se déclarent intéressés par ce produit.
On choisit au hasard une personne dans l'échantillon.
On note :

- J l'événement « La personne est jeune. »
- I l'événement « La personne est intéressée ».

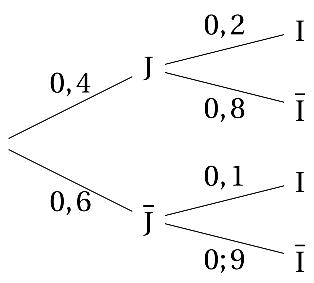
1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



2. (a) Calculer $p(I \cap J)$, $p(I \cap \bar{J})$, $p(\bar{I} \cap J)$ et $p(\bar{I} \cap \bar{J})$.
   (b) Calculer $p(I)$.
3. (a) Calculer la probabilité que la personne ait moins de 20 ans sachant qu'elle est intéressée par le produit.
   (b) Reproduire l'arbre de probabilités ci-dessous.



Correction : Baccalauréat S La Réunion 23 juin 2009

> Une société effectue auprès de 10 000 personnes une étude de marché concernant un nouveau produit. Dans cet échantillon, 40 % sont des jeunes (moins de 20 ans) et 20 % de ceux-ci se déclarent intéressés par le produit.
> En revanche, 10 % seulement des personnes de plus de 20 ans se déclarent intéressés par ce produit.
> On choisit au hasard une personne dans l'échantillon.
> On note :
>
> - J l'événement « La personne est jeune. »
> - I l'événement « La personne est intéressée ».
>
> 1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.
>
> 
>

2. (a) On a :

   i. $p(\mathsf{I} \cap \mathsf{J}) = p_{\mathrm{J}}(\mathrm{I}) \times p(\mathrm{J}) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$

   ii. De même : $p(\mathsf{I} \cap \overline{\mathsf{J}}) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$

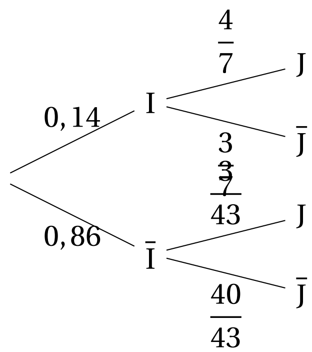
   iii. $p(\overline{\mathsf{I}} \cap \mathsf{J}) = 0,8 \times 0,4 = 0,32$

   iv. $p(\overline{\mathsf{I}} \cap \overline{\mathsf{J}}) = 0,9 \times 0,6 = 0,54$

   (b) Calculons $p(\mathsf{I})$.
   $\mathrm{I} = (\mathrm{I} \cap \mathrm{J}) \cup \left(\mathrm{I} \cap \overline{\mathrm{J}}\right)$, réunion d'événements incompatibles.
   Donc : $p(\mathrm{I}) = p\,(\mathrm{I} \cap \mathrm{J}) + p\left(\mathrm{I} \cap \overline{\mathrm{J}}\right) = p_{\mathrm{J}}(\mathrm{I}) \times p(\mathrm{J}) + p_{\overline{\mathrm{J}}}(\mathrm{I}) \times p\left(\overline{\mathrm{J}}\right) = 0,08 + 0,06 = 0,14$

3. (a) $p_{\mathrm{I}}(\mathrm{J}) = \dfrac{p(\mathrm{I} \cap \mathrm{J})}{p(\mathrm{I})} = \dfrac{0,08}{0,14} = \dfrac{8}{14} = \dfrac{4}{7}$

   (b) Reproduire l'arbre de probabilités ci-dessous.



Exercice 5.

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Dans cette question les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.

   On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.

   On note A l' évènement « le sac présente le défaut a » et B l'évènement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des évènements A et B sont respectivement $\mathrm{P(A)} = 0,02$ et $\mathrm{P(B)} = 0,01$; on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

   (a) Calculer la probabilité de l'évènement C « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».

   (b) Calculer la probabilité de l'évènement D « le sac est défectueux ».

   (c) Calculer la probabilité de l'évènement E « le sac ne présente aucun défaut ».

   (d) Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

2. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à $0,03$.

   On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

   (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   (b) Quelle est la probabilité de l'évènement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

   (c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

   Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Correction :

1. (a) Comme A et B sont indépendants, $p(\mathrm{C}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$

   $p(\mathrm{C}) = 0,02 \times 0,01 = 0,0002$

   (b) On a $p(\mathrm{D}) = p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,02 + 0,01 - 0,0002 = 0,0298$.

   (c) On a $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{D}}$ d'où $p(\mathrm{E}) = 1 - p(\mathrm{D}) = 1 - 0,0298 = 0,9702$.

   (d) On a $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})} = \dfrac{0,0002}{0,02} = 0,01$. (en fait $\dfrac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})} = \dfrac{p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})} = p(\mathrm{B})$).

2. (a) On a manifestement une épreuve de Bernoulli avec deux issues (sac sans défaut, sac défectueux).

   La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres

   $n = 100$ et $p = 0,03$.

   (b) On sait que la probabilité que k, $0 \leqslant k \leqslant 100$ sacs soient défectueux est :

$$p(\mathrm{X} = k) = \binom{100}{k} 0,03^k (1 - 0,03)^{100-k}$$

L'évènement contraire de l'évènement « au moins un sac est défectueux » est « il n'y a pas de sac défectueux qui a une probabilité de
$\binom{100}{0}0,03^0 \times 0,97^{100} = 0,97^{100} \approx 0,0476$.
La probabilité d'avoir au moins un sac défectueux est donc égale à
$1 - 0,97^{100} \approx 0,952 \approx 0,95$ (au centième près).

Interprétation : pour 100 sacs prélevés il y a à peu près 95 chances sur 100 d'avoir au moins un sac défectueux.

(c) Pour cette loi binomiale on a E $= n \times p = 100 \times 0,03 = 3$.

Interprétation : sur 100 sacs prélevés il y a en moyenne 3 sacs défectueux.