DS 4 - mardi 29 mars 2022

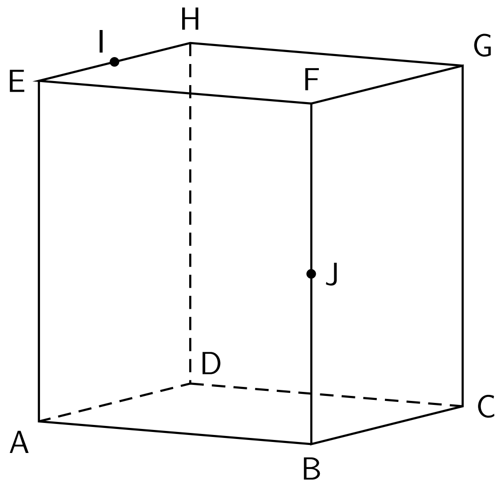
Durée : 3 heures

Nom : .... Prénom : ....

Le candidat traite 3 exercices : les exercices 1 et 2 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice A ou B
	/ 7	/7	/ 6

Exercice 1. 7 points



Dans l'espace, on considère le cube $\mathrm{ABCDEFGH}$ représenté ci-contre.

On note I et J les milieux respectifs des segments $[\mathrm{EH}]$ et $[\mathrm{FB}]$.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

   (c) On note K le milieu du segment $[\mathrm{HJ}]$. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?

3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.

   (a) En utilisant par exemple le triangle FIG pour base, démontrer que le volume du tétraèdre BFIG est égal à $\dfrac{1}{6}$.

   On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathrm{B} \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).

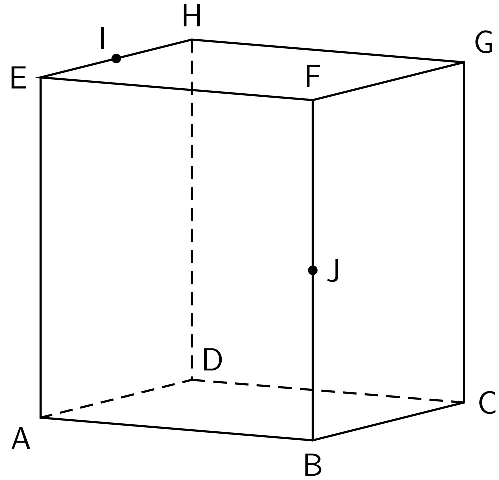
   (c) La droite Δ coupe le plan (BGI) en F'. Montrer que le point F' a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9}\ ;\ \dfrac{4}{9}\ ;\ \dfrac{5}{9}\right)$.

   (d) Calculer la longueur FF'.

   (e) Connaissant le volume du tétraèdre BFIG, en déduire l'aire du triangle BGI.

Correction

Sujet tiré de Baccalauréat S Métropole - La Réunion 12 septembre 2017



Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.

On note I et J les milieux respectifs des segments [EH] et [FB].

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

Les coordonnées des sommets du cube sont A $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, D $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, E $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, F $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, G $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, H $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. Comme I est le milieu de [EH] alors $\boxed{\text{I a pour coordonnées } (0;1/2;1)}$

   De même J est le milieu de [FB] alors $\boxed{\text{J a pour coordonnées } (1;0;1/2)}$

2. (a) On sait $\vec{n}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

   Pour le plan (BGI), on choisit les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ puisqu'ils ne sont pas colinéaires

   c'est à dire $\overrightarrow{\mathrm{BG}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BI}}\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1\end{pmatrix}$.

   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}} = 1\times 0+(-2)\times 1+2\times 1 = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{BG}}$
   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BI}} = 1\times(-1)+(-2)\times\dfrac{1}{2}+2\times 1 = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{BI}}$

   D'où le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (BGI)

   Donc $\boxed{\text{le vecteur } \vec{n} \text{ est un vecteur normal au plan (BGI)}}$

(b) On vient de prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BGI)

Donc le plan (BGI) a une équation de la forme $x-2y+2z+d=0$ où d est un réel à déterminer.

Comme le point B appartient au plan (BGI) donc $x_B - 2y_B + 2z_B + d = 0$

ce qui équivaut à $1-0+0+d=0$ et donc $d=-1$.

Donc $\boxed{\text{le plan (BGI) a pour équation } x-2y+2z-1=0}$

(c) On sait que le point K est le milieu du segment [HJ] alors K $\begin{pmatrix} \dfrac{0+1}{2} \\ \dfrac{1+0}{2} \\ \dfrac{1+\frac{1}{2}}{2} \end{pmatrix}$ c'est à dire K $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{4} \end{pmatrix}$

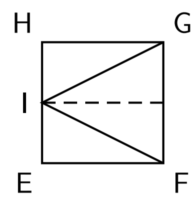
On regarde si les coordonnées de K vérifient l'équation du plan (ABC)

D'où $x_K - 2y_K + 2z_K - 1 = \dfrac{1}{2} - 2 \times \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{3}{4} - 1 = 0$

Donc $\boxed{\text{K appartient au plan (BGI)}}$

3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.

(a) Le triangle FIG est isocèle de sommet principal I, sa hauteur issue de I vaut 1 et sa base FG vaut 1



D'où son aire est égale à $\mathscr{A}_{\text{FIG}} = \dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Alors $\mathscr{V}_{\text{FBIG}} = \dfrac{1}{3}\mathscr{A}_{\text{FIG}} \times \text{BF} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{6}$

Donc $\boxed{\mathscr{V}_{\text{FBIG}} = \dfrac{1}{6}}$

(b) Soit Δ la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

Comme le plan (BGI) a $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal alors le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

La droite Δ passe par le point F de coordonnées $(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ a pour représentation paramétrique : } \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t \\ y &=& -2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z &=& 1+2t \end{array}\right.}$

(c) La droite Δ coupe le plan (BGI) en F' dont les coordonnées sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t \\ y &=& -2t \\ z &=& 1+2t \\ x-2y+2z-1 &=& 0 \end{array}\right.$$

On cherche t qui vérifie $(1+t)-2(-2t)+2(1+2t)-1=0$

c'est-à-dire $1+t+4t+2+4t-1=0 \iff 9t=-2 \iff t=-\dfrac{2}{9}$

On en déduit $\left\{\begin{array}{rclclcl} x &=& 1+t &=& 1-\dfrac{2}{9} &=& \dfrac{7}{9} \\ y &=& -2t &=& -2\times\left(-\dfrac{2}{9}\right) &=& \dfrac{4}{9} \\ z &=& 1+2t &=& 1+2\times\left(-\dfrac{2}{9}\right) &=& \dfrac{5}{9} \end{array}\right.$.

Donc $\boxed{\text{le point } \mathrm{F}' \text{ a pour coordonnées } \left(\dfrac{7}{9};\dfrac{4}{9};\dfrac{5}{9}\right)}$

(d) Connaissant les coordonnées de F et de F', on peut déterminer FF'

$\mathrm{FF}'^2=\left(\dfrac{7}{9}-1\right)^2+\left(\dfrac{4}{9}-0\right)^2=\left(\dfrac{5}{9}-1\right)^2=\dfrac{4}{81}+\dfrac{16}{81}+\dfrac{16}{81}=\dfrac{36}{81}=\dfrac{4}{9}$

$\mathrm{FF}'=\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\dfrac{2}{3}$

Donc $\boxed{\mathrm{FF}'=\dfrac{2}{3}}$

(e) On calcule d'une deuxième façon le volume du tétraèdre FBIG : $\mathscr{V}_{\mathrm{FBIG}}=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}_{\mathrm{BGI}}\times\mathrm{FF}'$

ce qui équivaut à $\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}_{\mathrm{BGI}}\times\dfrac{2}{3} \iff \dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{9}\times\mathscr{A}_{\mathrm{BGI}} \iff \mathscr{A}_{\mathrm{BGI}}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{9}{2}=\dfrac{3}{4}$

Donc $\boxed{\text{l'aire de BGI est égale à } \dfrac{3}{4}}$

Exercice 2. 7 points

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $\quad u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1. Etudier les variations la fonction u sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Etudier la convexité de la fonction u sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
4. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $\quad f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}_g$ la courbe de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $\quad g(x) = \ln(x)$.

1. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) - g(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.

   (b) En déduire que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2. Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $\quad \mathrm{H}(x) = \dfrac{1}{2}[\ln(x)]^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $\quad h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Correction

Sujet tiré de Baccalauréat S Amérique du Nord – 2 juin 2015

Partie A

On sait que la fonction u est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1. Méthode 1 : par somme de fonctions

   La fonction u est la somme des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x-3$, toutes deux strictement croissantes sur $]0\ ;\ +\infty[$, elle est donc strictement croissante sur cet intervalle.

   Méthode 2 : par dérivation

   On peut dériver la fonction u puisqu'elle est la somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$

   Comme $u(x) = \ln(x) + x - 3$ alors $u'(x) = \dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{1+x}{x}$

   D'où pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$ $u'(x) > 0$

   Donc $\boxed{\text{la fonction } u \text{ est donc strictement croissante sur }]0\ ;\ +\infty[}$

2. Etudions le signe de $u''(x)$ afin de connaitre la convexité de u sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   On sait que, sur $]0\ ;\ +\infty[$, $u'(x) = \dfrac{1}{x} + 1$

   Alors sur $]0\ ;\ +\infty[$, $u''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$

   Donc $\boxed{\text{la fonction } u \text{ est concave sur }]0\ ;\ +\infty[}$

3. Calculons

   - $u(2) = \ln(2) - 1 < 0$ puisque $2 < \mathrm{e}$ alors $\ln(2) < \ln(\mathrm{e}) = 1$
   - $u(3) = \ln(3) > 0$ puisque $3 > 1$ alors $\ln(3) > \ln(1) = 0$

   On sait que :

   - la fonction u est définie, continue, comme somme de fonctions continues sur $]0\ ;\ +\infty[$
   - la fonction u est donc strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc en particulier sur $[2;3]$
   - $u(2) < 0 < u(3)$

   Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

   On peut dire que $\boxed{\text{l'équation } u(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } [2;3] \text{ donc sur }]0\ ;\ +\infty[}$

4. D'après le sens de variation de u, on a :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	$\Vert$	-	0	$+$	

Partie B

On sait que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)[\ln(x)-2]+2$.

1. On a $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)[\ln(x)-2]+2$

   On sait que :

   - $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}1-\dfrac{1}{x}=-\infty$
   - $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln(x)-2=-\infty$

   Par produit, on peut dire que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)[\ln(x)-2]=+\infty$

   Donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)[\ln(x)-2]+2=+\infty$

   Conclusion $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty}$

   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{1}{x}=1$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)+2=+\infty$

   Par produit, on peut dire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)[\ln(x)-2]=+\infty$

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)[\ln(x)-2]+2=+\infty$

   Conclusion $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

2. (a) On sait que $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)[\ln(x)-2]+2$

   Alors f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ comme sommes et produits de fonctions dérivables sur $]0;\ +\infty[$.

   On a $f=u\times v+2$ et $f'=u'\times v+v'\times u+0$

   avec $u(x)=1-\dfrac{1}{x}$ $u'(x)=+\dfrac{1}{x^2}$ et $v(x)=\ln(x)-2$ $v'(x)=\dfrac{1}{x}$

   Alors pour tout $x>0$:

   $$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{x^2}(\ln(x)-2)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\\&=\frac{1}{x^2}(\ln(x)-2)+\frac{x-1}{x}\times\frac{1}{x}\\&=\frac{1}{x^2}(\ln(x)-2+x-1)\\&=\frac{1}{x^2}(\ln(x)+x-3)\\&=\frac{1}{x^2}u(x)\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\text{sur }]0\ ;\ +\infty[,\ f'(x)=\dfrac{u(x)}{x^2}}$

(b) On sait que sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$

Comme pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $u(x)$

D'après la partie A3,

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
Variation de f	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0\ ;\ \alpha] \text{ et strictement croissante sur }]\alpha\ ;\ +\infty]}$

Partie C

1. (a) On cacule :

$$
\begin{aligned}
f(x) - g(x) = f(x) - \ln(x) \\
&= \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2 - \ln(x) \\
&= \frac{x-1}{x}(\ln(x) - 2) + 2 - \ln(x) \\
&= \frac{(x-1) \times (\ln(x) - 2)}{x} + 2 - \ln(x) \\
&= \frac{(x-1) \times (\ln(x) - 2) + 2x - x\ln(x)}{x} \\
&= \frac{x\ln(x) - \ln(x) - 2x + 2 + 2x - x\ln(x)}{x} \\
&= \frac{2 - \ln(x)}{x}
\end{aligned}
$$

Donc $\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de }]0\ ;\ +\infty[,\ f(x) - g(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}}$

(b) Un point $\mathrm{M}(x_\mathrm{M}; y_\mathrm{M})$ appartient aux deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ à la fois lorsque $f(x_\mathrm{M}) = g(x_\mathrm{M})$ autrement dit quand $f(x_\mathrm{M}) - g(x_\mathrm{M}) = 0$

Or $f(x) - g(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$

Donc $f(x) - g(x) = 0 \iff \dfrac{2 - \ln(x)}{x} = 0 \iff 2 - \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = 2 \iff x = \mathrm{e}^2$

D'où $x_\mathrm{M} = \mathrm{e}^2$ et $y_\mathrm{M} = \ln\left(\mathrm{e}^2\right) = 2$

Donc $\boxed{\text{les deux courbes se coupent donc en un unique } \mathrm{M}\left(\mathrm{e}^2;2\right)}$

2. Montrer que H définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $\mathrm{H}(x) = \dfrac{1}{2}[\ln(x)]^2$ est une primitive de h définie par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

   Revient à montrer que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{H}'(x) = h(x)$

   On a $\mathrm{H}(x) = \dfrac{1}{2}[\ln(x)]^2$

   Alors H est dérviable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme composées de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$

   D'où $\mathrm{H} = \dfrac{1}{2}u^2$ et $\mathrm{H}' = \dfrac{1}{2} \times 2u'u$ avec $u(x) = \ln(x)$ $u'(x) = \dfrac{1}{x}$

   Donc $\mathrm{H}'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} = h(x)$

   Donc $\boxed{\mathrm{H} \text{ est bien une primitive de } h \text{ sur }]0\ ;\ +\infty[}$

3. On doit calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

   On utilise la linéarité de l'intégrale :

   $$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2 - \ln(x)}{x}\mathrm{d}x \\ &= 2\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

   Or $\ln$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et H est une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

   $$\begin{aligned} \mathrm{I} &= 2\,[\ln(x)]_1^{\mathrm{e}^2} - [\mathrm{H}(x)]_1^{\mathrm{e}^2} \\ &= 2\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right) - \ln(1)\right) - \frac{1}{2}\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right)^2 - \ln(1)^2\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2 - \ln(x)}{x}\mathrm{d}x}$

   Et $\boxed{\text{l'aire délimitée par } \mathscr{C}_f,\ \mathscr{C}_g, \text{ et les deux droites d'équations } x = 1 \text{ et } x = \mathrm{e}^2 \text{ est donc égale à } 2}$

Le candidat traite un seul des deux exercices A ou B.

Exercice A - Thème : Probabilités et suites 6 points

Dans un pays, suite à une élection, un institut de sondage publie chaque mois la cote de popularité du président (c'est-à-dire le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable à l'action qu'il mène). Ce sondage résulte d'une enquête réalisée auprès d'un échantillon de la population du pays.

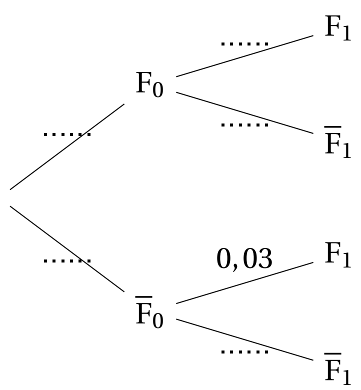
Les enquêtes réalisées révèlent que d'un mois à l'autre :

- 7 % des personnes qui étaient favorables ne le sont plus ;
- 3 % des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent.

On interroge au hasard une personne dans la population du pays et on note :

- F_0 l'évènement « la personne interrogée a une opinion favorable dès l'élection du président » de probabilité p_0 et $\overline{F_0}$ son évènement contraire ;
- F_1 l'évènement « la personne interrogée le 1^er^ mois (après l'élection) a une opinion favorable » de probabilité p_1 et $\overline{F_1}$ son évènement contraire.

1. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



   (b) Montrer que $p_1 = 0,9p_0 + 0,03$.

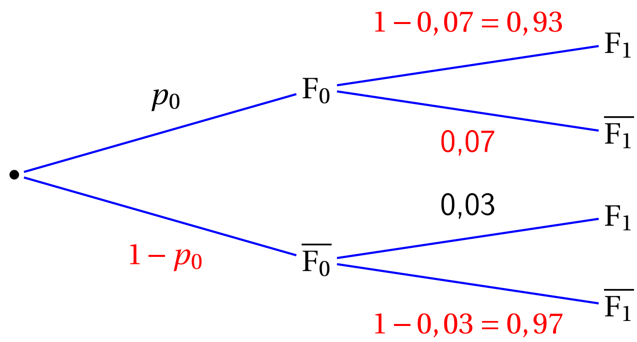
Pour la suite de l'exercice, on donne $p_0 = 0,55$ et on note, pour tout entier naturel n, F_n l'évènement « la personne interrogée le n-ième mois a une opinion favorable » et p_n sa probabilité.
On admet de plus, que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,9p_n + 0,03$.

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = p_n - 0,3$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et préciser la valeur de son premier terme u_0.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.
3. (a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $0,25 \times 0,9^n + 0,3 \leqslant 0,4$.
   (b) Interpréter le résultat trouvé.

Correction

Sujet tiré de Baccalauréat ES/L Amérique du Sud – 21 novembre 2013

1. (a) En fonction de l'énoncé, on complète l'arbre pondéré :



   (b) On sait que F_1 et $\overline{F_1}$ forme une patition de l'univers

   Alors d'après la formule des probabilités totales :

   $p_1 = P(F_1) = P(F_0 \cap F_1) + P(\overline{F_0} \cap F_1) = p_0 \times 0,93 + (1-p_0) \times 0,03$

   $= 0,93p_0 + 0,03 - 0,03p_0 = 0,9p_0 + 0,03$

On admet de plus, que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,9p_n + 0,03$.

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = p_n - 0,3$.

   (a) On sait que $u_n = p_n - 0,3$ donc $u_0 = p_0 - 0,3 = 0,55 - 0,3 = 0,25$

   Et $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,3 = 0,9p_n + 0,03 - 0,3 = 0,9p_n - 0,27$.

   Or $u_n = p_n - 0,3$ donc $p_n = u_n + 0,3$

   D'où $u_{n+1} = 0,9(u_n + 0,3) - 0,3 = 0,9u_n + 0,3 - 0,3 = 0,9u_n$

   Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est géométrique de premier terme } u_0 = 0,25 \text{ et de raison } q = 0,9}$

   (b) Comme la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 0,25$ et de raison $q = 0,9$

   Alors $u_n = u_0 \times q^n = 0,25 \times 0,9^n$ pour tout entier naturel n

   D'où $p_n = u_n + 0,3 = 0,25 \times 0,9^n + 0,3$

   Donc $\boxed{p_n = 0,25 \times 0,9^n + 0,3 \text{ pour tout entier naturel } n}$

   (c) La suite (u_n) est géométrique de raison 0,9

   Or $-1 < 0,9 < 1$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.

   Comme $p_n = u_n + 0,3$, d'après les théorèmes sur les limites de suites,

   on peut dire que $\boxed{\text{la suite } (p_n) \text{ est convergente et a pour limite } 0,3}$

   De plus p_n est la probabilité de l'évènement « la personne interrogée le n-ième mois a une opinion favorable », alors on peut interpréter ce résultat de la façon suivante : $\boxed{\text{quand le nombre de mois augmente, le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable tend vers } 30\,\%}$

3. (a) On doit résoudre $0,25\times 0,9^n+0,3\leqslant 0,40$

Alors $0,25\times 0,9^n\leqslant 0,1 \iff 0,9^n\leqslant 0,4 \iff 0,9^n\leqslant 0,4$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

D'où $0,9^n\leqslant 0,4 \iff \ln(0,9^n)\leqslant \ln(0,4) \iff n\times\ln(0,9)\leqslant\ln(0,4)$

Or $\ln(0,9)<0$

Donc $n\times\ln(0,9)\leqslant\ln(0,4) \iff n\geqslant\dfrac{\ln(0,4)}{\ln(0,9)} \iff n\geqslant 8,67 \iff n\geqslant 9$

Donc $\boxed{0,25\times 0,9^n+0,3\leqslant 0,4 \iff n\geqslant 9}$

(b) Comme « $0,25\times 0,9^n+0,3\leqslant 0,4 \iff n\geqslant 9$ »

Cela revient à « $p_n\leqslant 0,4 \iff n\geqslant 9$ » ou « $p_n\leqslant 40\,\% \iff n\geqslant 9$ »

On peut donc dire qu'à partir du 9e mois, le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable est inférieur à 40 %

Exercice B - Thème : Probabilités et loi binomiale 6 points

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs. On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

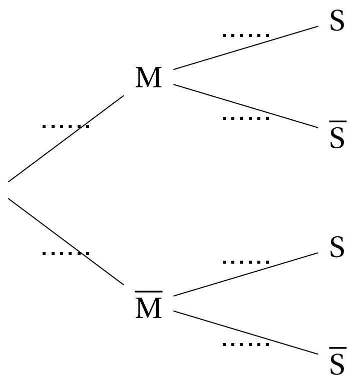
On note :
- S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que :
   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à $0,97$;
   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à $0,97$.

   (a) À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}(\overline{S})$.

   (b) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous illustrant cette situation.



   (c) Montrer que : $P(S) = 0,03188$.

   (d) En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. (On arrondira le résultat à 10^{-3}.)

2. 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à $0,03188$.

   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   (b) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

   (c) Sans le justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :
   - la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
   - la probabilité qu'au maximum 7 personnes fassent sonner le portique.

   (d) Donner la valeur du plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$.

Correction

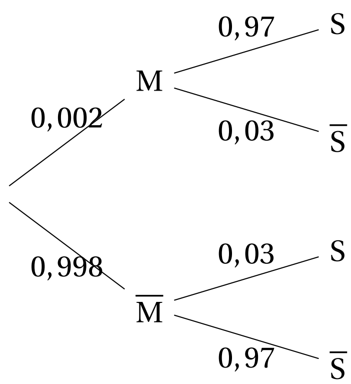
Sujet tiré de Baccalauréat ES/L Liban 29 mai 2018

1. On sait que :

   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à $0,97$;
   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à $0,97$.

   (a) Daprès l'énoncé, $\mathrm{P(M)} = \dfrac{1}{500} = 0,002$, $\mathrm{P_M(S)} = 0,97$ et $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{M}}}\left(\overline{\mathrm{S}}\right) = 0,97$.

   (b) L'arbre pondéré ci-dessous illustre cette situation :



   (c) On sait que M et $\overline{\mathrm{M}}$ forme une patition de l'univers

   Alors d'après la formule des probabilités totales :

   $\mathrm{P(S)} = \mathrm{P(S \cap M)} + \mathrm{P}\left(\mathrm{S} \cap \overline{\mathrm{M}}\right) = \mathrm{P_M(S)} \times \mathrm{P(M)} + \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{S}) \times \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{M}}\right)$

   $\mathrm{P(S)} = 0,002 \times 0,97 + 0,998 \times 0,03 = 0,03188$

   Donc $\boxed{\mathrm{P(S)} = 0,03188}$

   (d) Par définition : $\mathrm{P_S(M)} = \dfrac{\mathrm{P(M \cap S)}}{\mathrm{P(S)}} = \dfrac{\mathrm{P_M(S)} \times \mathrm{P(M)}}{\mathrm{P(S)}} = \dfrac{0,002 \times 0,97}{0,03188} \approx 0,061$

   Donc $\boxed{\text{la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique est d'environ } 0,061}$

2. On sait que X est la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe et la probabilité que le portique sonne est égale à $0,03188$.

   (a) On répète de manière identique et indépendante (situation assimilée à un tirage avec remise) 80 fois de suite cette épreuve. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli

   Donc $\boxed{\text{X suit une loi binomiale de paramètres } n = 80 \text{ et } p = 0,03188}$

   (b) L'espérance d'une loi binomiale est : $\mathrm{E(X)} = n \times p = 80 \times 0,03188 = 2,5504$.

   Donc $\boxed{\text{par groupe de 80 personnes le portail sonnera entre 2 et 3 fois}}$

(c) On donne les valeurs arrondies à 10^{-3} de :

- la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique est d'environ $0,925$

  car $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - 0,03188)^{80} \approx 0,925$.

- la probabilité qu'au maximum 7 personnes fassent sonner le portique est d'environ $0,996$

  car à l'aide de la calculatrice $p(X \leqslant 7) \approx 0,996$

(d) On cherche la valeur du plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$

Avec la calculatrice : $p(X \leqslant 4) \approx 0,887$ et $p(X \leqslant 5) \approx 0,957$

Donc $\boxed{n = 5}$