DS 2 - mardi 13 décembre 2022 - sujet A

Durée : 1h50 Calculatrice est autorisée

Nom : .... Prénom : ....

TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
	/ 6	/8,5	/4	/ 1,5

Exercice 1. 6,5 points

Un supermarché dispose d'un stock de pommes. On sait que 40 % des pommes proviennent d'un fournisseur A et le reste d'un fournisseur B.

Il a été constaté que 85 % des pommes provenant du fournisseur A sont commercialisables. La proportion de pommes commercialisables est de 95% pour le fournisseur B.

Le responsable des achats prend au hasard une pomme dans le stock. On considère les évènements suivants :

- A : « La pomme provient du fournisseur A »
- B : « La pomme provient du fournisseur B »
- C : « La pomme est commercialisable »

Partie A

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
2. Montrer que la probabilité que la pomme ne soit pas commercialisable est 0,09.
3. La pomme choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois plus de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. A-t-il raison ?

Pour la partie B, on suppose que la proportion de pommes non commercialisables est p=0,09.

Partie B

On prend au hasard 25 pommes dans le stock. Le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

On arrondira les résultat à 0,001.

1. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de pommes commercialisables. Déterminer la loi de probablité de X dans cette situation.
2. Quelle est la probabilité que les 25 pommes soient toutes commercialisables ?

3. Quelle est la probabilité qu'au moins trois quarts des pommes soient commercialisables ?

4. Quelle est la moyenne de pommes commercialisables sur les 25 pommes ?

Correction

Un supermarché dispose d'un stock de pommes. On sait que 40 % des pommes proviennent d'un fournisseur A et le reste d'un fournisseur B.

Il a été constaté que 85 % des pommes provenant du fournisseur A sont commercialisables. La proportion de pommes commercialisables est de 95% pour le fournisseur B.

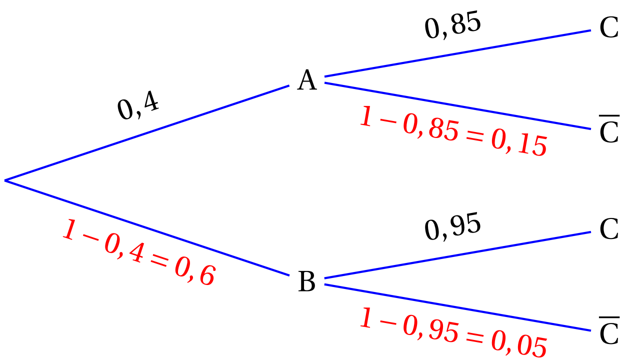
Le responsable des achats prend au hasard une pomme dans le stock. On considère les évènements suivants :

- A : « La pomme provient du fournisseur A »
- B : « La pomme provient du fournisseur B »
- C : « La pomme est commercialisable »

Partie A

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.

> On construit un arbre pondéré traduisant la situation :



2. Montrer que la probabilité que la pomme ne soit pas commercialisable est 0,09.

> L'événement « la pomme n'est pas commercialisable » est l'événement $\overline{\mathrm{C}}$.
>
> D'après la formule des probabilités totales :
>
> $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{C}}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{C}} \cap \mathrm{A}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{C}} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{C}}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{C}}) = 0,4 \times 0,15 + 0,6 \times 0,05 = 0,06 + 0,03 = 0,09$
>
> Donc $\boxed{\text{la probabilité que la pomme ne soit pas commercialisable est 0,09}}$

3. La pomme choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois plus de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. A-t-il raison ?

> Il s'agit, dans cette question, de comparer $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{B})$.
>
> $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{C}})}{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{C}})} = \dfrac{0,06}{0,09} = \dfrac{2}{3}$; $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{B}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{C}})}{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{C}})} = \dfrac{0,03}{0,09} = \dfrac{1}{3}$
>
> Donc $\boxed{\text{le responsable des achats a raison quand il dit qu'une pomme non commercialisable a deux fois p}}$

Pour la partie B, on suppose que la proportion de pommes non commercialisables est p=0,09.

Partie B

On prend au hasard 25 pommes dans le stock. Le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

On arrondira les résultat à 0,001.

1. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de pommes commercialisables. Déterminer la loi de probablité de X dans cette situation.

> $\boxed{\text{La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 25 et } 0,91}$ puisque :
>
> - il y a deux issues possibles : commercialisable ou non
> - il y a un tirage avec remise d'où l'idépendance
> - la probabilité qu'une pomme soit commerciable est de $1-0,09=0,91$

2. Quelle est la probabilité que les 25 pommes soient toutes commercialisables ?

> Comme X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(25, 0,91)$, alors $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
>
> Alors $\mathrm{P}(\mathrm{X}=25)=\binom{25}{25}0,91^{25}0,09^0 \approx 0,095$
>
> Donc $\boxed{\text{la probabilité que les 15 pommes soient toutes commercialisables est d'environ } 0,095}$

3. Quelle est la probabilité qu'au moins trois quarts des pommes soient commercialisables ?

> Trois quarts des pommes représente $\frac{3}{4}\times 25=18,75$. Donc la probabilité recherchée est $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 19)$.
>
> Grâce à la calculatrice, on obtient $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 19)\approx 0,995}$.

4. Quelle est la moyenne de pommes commercialisables sur les 25 pommes ?

> On cherche donc l'espérance de X : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=n\times p=25\times 0,91=22,75$
>
> Donc $\boxed{\text{en moyenne, on peut estimer à environ 23 pommes commerciables sur les 25}}$

Exercice 2. 8,5 points

On considère les fonctions h et f définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x)=x-\frac{1}{6}x^2$ et $f(x)=\ln(3x+1)$.

On note P la courbe représentative de h et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. Étudier les variations de la fonction h sur $[0;+\infty[$.
2. (a) Étudier les variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

   (b) Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}_0$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. On se propose d'étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à P. Pour cela on considère la fonction ψ, définie sur $[0;+\infty[$ par $\psi(x)=f(x)-h(x)$.

   (a) Calculer la dérivée ψ' de ψ. En déduire le sens des variation de ψ.

   (b) Calculer $\psi(0)$. Déterminer enfin le signe de ψ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   On pourrait également démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de sa tangente $\mathscr{T}_0$.
4. (a) Déterminer une primitive H de la fonction h sur $[0;+\infty[$.

   (b) Montrer que la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=\left(x+\frac{1}{3}\right)\ln(3x+1)-\left(x+\frac{1}{3}\right)$ est une primitive de la fonction f.

   (c) La suite du problème se fera au moins de mars, il vous faudra encore un peu de patience !

<u>Correction</u>

On considère les fonctions h et f définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x)=x-\frac{1}{6}x^2$ et $f(x)=\ln(3x+1)$.

On note P la courbe représentative de h et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. On a $h(x)=x-\frac{1}{6}x^2$

   Alors la fonction h est dériable sur $[0;+\infty[$ comme somme de fonctions dériables sur $[0;+\infty[$

   D'où $h'(x)=1-\frac{1}{6}\times 2x=1-\frac{1}{3}\times x$

   Donc $h'(x)=\frac{3-x}{3}$

   D'où $h'(x)$ est du signe de $3-x$

   <u>On en déduit donc le tableau de variations de la fonction h</u>

x	0		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de h	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	

2. (a) On a $f(x) = \ln(3x+1)$

Alors la fonction f est dériable sur $[0;+\infty[$

On a $f = \ln(u)$ alors $f' = \dfrac{u'}{u}$

avec $u(x) = 3x+1$ et $u'(x) = 3$

D'où $f'(x) = \dfrac{3}{3x+1}$

D'où le signe de $f'(x)$ est du signe de $3x+1$ sur $[0;+\infty[$

On en déduit donc le tableau de variations de la fonction f

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
Variation de f	0 ↗

(b) L'une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est de la forme $\mathscr{T}_0$: $y = f'(0)(x-0)+f(0)$

avec $f'(0) = \dfrac{3}{3\times 0+1} = 3$ et $f(0) = \ln(3\times 0+1) = \ln(1) = 0$

D'où $\boxed{\mathscr{T}_0 : y = 3x}$

3. On se propose d'étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à P, on considère la fonction ψ, définie sur $[0;+\infty[$ par $\psi(x) = f(x) - h(x)$.

(a) On a $\psi(x) = f(x) - h(x)$

Alors la fonction ψ est dériable sur $[0;+\infty[$ comme somme de fonctions dériables sur $[0;+\infty[$

D'où $\psi'(x) = f'(x) - h'(x) = \dfrac{3}{3x+1} - \dfrac{3-x}{3}$

$$= \frac{3\times 3-(3-x)(3x+1)}{3(3x+1)}$$

$$= \frac{9-9x-3+3x^2+x}{3(3x+1)}$$

$$= \frac{3x^2-8x+6}{3(3x+1)}$$

Or sur $[0;+\infty[$, $3(3x+1) > 0$ d'où $\psi'(x)$ est du signe de $3x^2-8x+6$

Etudions le signe de $3x^2-8x+6$ en calculant le discriminant $\Delta = b^2-4ac = (-8)^2-4\times 3\times 6 = 64-72 = -8 < 0$

D'où $3x^2-8x+6$ est du signe de $a=3$, c'est à dire que $3x^2-8x+6>0$

On en déduit que sur $[0;+\infty[$, $\psi'(x)>0$

D'où $\boxed{\text{la fonction } \psi \text{ est strictement croissante sur } [0;+\infty[}$

(b) Comme $\psi(0)=f(0)-h(0)=0$

On peut en déduire de la question précédente que sur $[0;+\infty[$, $\psi(x)>0$

C'est à dire que sur $[0;+\infty[$, $f(x)-h(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>h(x)$

Donc $\boxed{\text{sur } [0;+\infty[\text{ , la courbe } \mathscr{C}_f \text{ est au dessus de P}}$

D'après les différentes informations, on peut montrer que sur $[0;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est comprise entre $\mathscr{T}_0$ et P.

4. (a) On a $h(x)=x-\dfrac{1}{6}x^2$

Alors le fonction h est continue sur $[0;+\infty[$, on peut alors lui déterminer une primitive H

D'où $\mathrm{H}(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{3}x^3=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{18}x^3$

Donc $\boxed{\text{une primitive de } h \text{ sur } [0;+\infty[\text{ est H, définie par } \mathrm{H}(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{18}x^3}$

(b) La fonction F sera une primitive de la fonction f si sur $[0;+\infty[$ $\mathrm{F}'(x)=f(x)$.

On a $\mathrm{F}(x)=\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\ln(3x+1)-\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$

Alors la fonction F est dériable sur $[0;+\infty[$ comme somme d'un produit de fonctions dériables et d'une fontion polynomiale sur $[0;+\infty[$

On a $\mathrm{F}=u\times v-w$ et $\mathrm{F}'=u'v+uv'-w'$ avec $\begin{cases} u(x)=x+\dfrac{1}{3} & \text{et} \quad u'(x)=1 \\ v(x)=\ln(3x+1) & \text{et} \quad v'(x)=\dfrac{3}{3x+1} \\ w(x)=x+\dfrac{1}{3} & \text{et} \quad w'(x)=1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \mathrm{F}'(x) &= 1\times\ln(3x+1)+\left(x+\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{3x+1}-1 \\ &= \ln(3x+1)+\frac{3x+1}{3}\times\frac{3}{3x+1}-1 \\ &= \ln(3x+1)+1-1=\ln(3x+1)=f(x) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la fonction F est bien une primitive de la fonction } f \text{ sur } [0;+\infty[}$

(c) La suite du problème se fera au moins de mars, il vous faudra encore un peu de patience !

i. Calculer $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^1 3x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^1\left(x-\frac{1}{6}x^2\right)\mathrm{d}x$.

ii. Soit A l'aire de la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$.

Montrer que : $\dfrac{3}{2}\leqslant \mathrm{A}\leqslant\dfrac{4}{9}$.

Exercice 3. 4 points

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 0,5 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 0,6\ u_n + 0,24 \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0,6 -\ 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

2. Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n). Justifier.

Correction

On a la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 0,5$ et $u_{n+1} = 0,6\ u_n + 0,24$

1. On doit démontrer par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}^*\quad \mathrm{P}_n\ :\ u_n = 0,6 - 0,1 \times\ 0,6^{n-1}$

   - Initialisation : Pour $n =\ 1$, alors $0,6 -\ 0,1 \times 0,6^0 =\ 0,6\ -\ 0,1 = 0,5 = u_1$

     La propriété est initialisée.

   - Hérédité : Soit n ∈ ℕ∗ , supposons que la propriété P_n est vraie càd $u_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$, montrons que la propriété P_{n+1} est vraie càd $u_{n+1} = 0,6 -\ 0,1 \times 0,6^n$.

     On a $u_{n+1} = 0,6\ u_n + 0,24$

     $$\begin{aligned} &= 0,6 \times \left(0,6 -\ 0,1 \times 0,6^{n-1}\right) + 0,24 \\ &= 0,36 -\ 0,1 \times 0,6 \times 0,6^{n-1} + 0,24 \\ &= 0,36 -\ 0,1 \times 0,6^n + 0,24 \\ &= 0,6 -\ 0,1 \times 0,6^n \end{aligned}$$

     La propriété est héréditaire.

   - Conclusion : On vient de démontré que la propriété P_n est initialisé au rang 1 et héréditaire, alors d'après le principe de récurence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la propriété P_n est vraie

     Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ u_n = 0,6 -\ 0,1 \times 0,6^{n-1}}$

2. On va chercher la limite de la suite (u_n)

   On sait que ∀n ∈ ℕ* , $u_n = 0,6 -\ 0,1 \times 0,6^{n-1}$

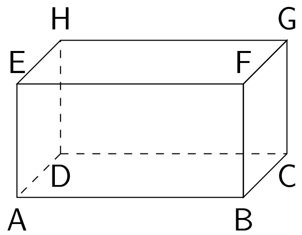
   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^{n-1}\ = 0$ car $-1\ <\ 0,6\ <\ 1$

   D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1 \times 0,6^{n-1}\ = 0$

   Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}\ = 0,6$

   Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0,6}$

Exercice 4. 1,5 points



On considère le parallélépipède $\mathrm{ABCDEFGH}$

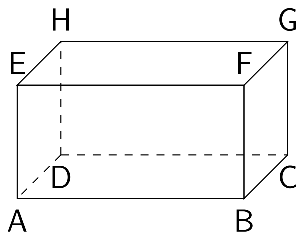
• Remplacer chaque symbole par la lettre voulue

$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \overrightarrow{\mathrm{CF}} + \overrightarrow{\mathrm{C}\square}$

• Déterminer les vecteurs suivants, c'est-à-dire simplifiez les expressions

$\overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{HF}} + \overrightarrow{\mathrm{BF}} =$ ....

Correction



On considère le parallélépipède $\mathrm{ABCDEFGH}$

• Compléter par la lettre voulue

$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \overrightarrow{\mathrm{CF}} + \overrightarrow{\mathrm{FE}} = \overrightarrow{\mathrm{CF}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ réponse D

• Déterminer le vecteur suivant, c'est-à-dire simplifiez l'expression afin d'obtenir un seul vecteur.

$\overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{HF}} + \overrightarrow{\mathrm{BF}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{DB}} + \overrightarrow{\mathrm{BF}} = \overrightarrow{\mathrm{CF}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}}$