Matrices

Définition des matrices

• Une matrice carrée de format n (ou de taille n ou d'ordre n ou de dimension n) est un tableau carré de nombres réels à n lignes et n colonnes.
Le coefficient ligne i, colonne j de la matrice carrée A est souvent noté $a_{i,j}$. Le numéro de ligne est écrit en premier et le numéro de colonne en deuxième.
La diagonale principale de cette matrice est l'ensemble des coefficients, ligne 1, colonne 1 et ligne 2, colonne 2 ... et ligne n, colonne n. Les coefficients de la diagonale principale sont les coefficients diagonaux de la matrice carrée.
• Une matrice colonne (ou un vecteur colonne ou une colonne) de format n est un tableau de nombres réels à n lignes et 1 colonne. Une matrice ligne de format n est un tableau de nombres réels à 1 ligne et n colonnes.

Matrices particulières

La matrice carrée nulle est la matrice dont tous les coefficients sont nuls. Elle se note 0_n.
La matrice identité est la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et les autres à 0. Elle se note I_n. Par exemple, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Une matrice diagonale est une matrice carrée dont les coefficients non diagonaux sont nuls. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

Opération sur les matrices

SOMME. On peut additionner deux matrices carrées de même format ou deux vecteurs colonnes de même format.
Soient A et B deux matrices carrées de **même format** n.
La somme $A+B$ est la matrice carrée de format n dont le coefficient ligne i, colonne j est la somme des coefficients ligne i, colonne j, de A et de B. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & -1+3 \\ 4+0 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Définition analogue pour des vecteurs colonnes. Par exemple, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN RÉEL. On peut multiplier une matrice carrée ou une matrice colonne par un réel. Soit A une matrices carrée de format n et λ un réel.
Le produit λA est la matrice carrée de format n dont le coefficient ligne i, colonne j est le produit du coefficient ligne i, colonne j, de A par le réel λ. Par exemple,

$$-2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times 3 & -2\times(-1) \\ -2\times 4 & -2\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}.$$

Définition analogue pour des vecteurs colonnes. Par exemple, $3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

PRODUIT DE MATRICES. On peut multiplier une ligne de format n par une colonne de même format, une matrice carrée de format n par une colonne de format n, deux matrices carrées de même format n.

Produit d'une ligne de format n par une colonne de même format. Le produit de la ligne $L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ par la colonne $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est le réel $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = (-1)\times 4 + 2\times(-3) = -10.$$

Le produit $L\times C$ existe mais le produit $C\times L$ n'a pas de sens.

Produit d'une matrice carrée de format n par une colonne de même format. Le produit de la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ par la colonnbe $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est la matrice colonne dont le coefficient ligne i est le produit de la ligne i de A par la colonne C c'est-à-dire le réel $a_{i,1}b_1 + a_{i,2}b_2 + \dots + a_{i,n}b_n$. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\times 4 + 2\times 3 \\ 1\times 4 + 5\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Le produit $A \times C$ existe mais le produit $C \times A$ n'a pas de sens.

Produit de deux matrices carrées de même format n.

Le produit $A \times B$ de la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ par la matrice carrée $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix}$ est la matrice carrée de format n dont le coefficient ligne i, colonne j est le produit de la ligne i de A par la colonne j de B c'est-à-dire le nombre $a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + \ldots + a_{i,n} \times b_{n,j}$. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times (-2) + (-1) \times 0 & 3 \times 3 + (-1) \times 4 \\ 4 \times (-2) + 5 \times 0 & 4 \times 3 + 5 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -8 & 32 \end{pmatrix}.$$

On peut constater que la colonne j de $A \times B$ est le produit de la matrice carrée A par la colonne j de B.

Les deux produits $A \times B$ et $B \times A$ existent mais on peut avoir $A \times B \neq B \times A$.

Propriétés des opérations sur les matrices

L'addition des matrices carrées ou des matrices colonnes a toutes les propriétés de l'addition des nombres réels.
• Pour toutes matrices carrées A et B de même format, $A + B = B + A$.
Pour toutes matrices colonnes X et X', $X + X' = X' + X$.
• Pour toutes matrices carrées A, B et C de même format, $(A + B) + C = A + (B + C)$. L'expression sans parenthèses $A + B + C$ a donc un sens.
Pour toutes matrices colonnes X, X' et X'', $(X + X') + X'' = X + (X' + X'')$.
• Pour toute matrice carrée A de format n, $A + 0_n = A$.
Pour toute matrice colonne X, $X + 0 = X$.
• Pour toute matrice carrée A de format n, $A + (-A) = 0_n$.
Pour toute matrice colonne X, $X + (-X) = 0$.

La multiplication des matrices par un réel a aussi des propriétés agréables.
• Pour toute matrice carrée A et tous réels λ et μ, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
Pour toute matrice colonne X et tous réels λ et μ, $(\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu X$.
• Pour toutes matrices carrées A et B et tout réel λ, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
Pour toutes matrices colonnes X et X' et tout réel λ, $\lambda(X + X') = \lambda X + \lambda X'$.

La multiplication des matrices carrées de même format ou la multiplication des matrices carrées par des matrices colonnes est moins agréable que la multiplcation des nombres. Son principal défaut est de ne pas être commutative. Néanmoins,
• Pour toutes matrices carrées A, B et C de même format, $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.
Pour toutes matrices carrées A et B de format n et toute matrice colonne X de format n, $(A \times B) \times X = A \times (B \times X)$.
• Pour toute matrice carrée A, $A \times I_n = I_n \times A = A$.
Pour toute matrice colonne X, $I_n \times X = X$.
• Pour toutes matrices carrées A, B et C de même format, $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$.
Pour toute matrice carrée A de format n et toutes matrices colonnes X et X' de format n, $A \times (X + X') = A \times X + A \times X'$.
Pour toute matrices carrées A et B de format n et toute matrice colonne X de format n, $(A + B) \times X = A \times X + B \times X$.

Inverse d'une matrice carrée inversible

Définition. Soit A une matrice carrée de format n. A est inversible si et seulement si il existe une matrice carrée B de format n telle que $A \times B = B \times A = I_n$.

Il existe des matrices carrées non inversibles.

Théorème. Soit A une matrice carrée de format n. S'il existe une matrice carrée B de format n telle que $A \times B = I_n$, alors on a automatiquement $B \times A = I_n$.

Théorème. Soit A une matrice carrée de format n. S'il existe une matrice carrée B de format n telle que $A \times B = I_n$, alors B est unique.
Cette matrice s'appelle l'inverse de A et se note A^{-1}.

Puissances de matrices

Définition. Soit A une matrice carrée de format n. On pose $A^0 = I_n$, $A^1 = A$ et pour $n \geqslant 2$, $A^p = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{p \text{ facteurs}}$.

Théorème. Soit A une matrice carrée de format n.
- Pour tous entiers naturels p et q, $A^p \times A^q = A^{p+q}$.
- Pour tous entiers naturels p et q, $(A^p)^q = A^{pq}$.

Danger. Si A et B sont deux matrice carrées de même format n, on peut avoir $(AB)^p \neq A^p B^p$.

Situation pratique fréquente. Soit A une matrice carrée de format n. Il arrive qu'on puisse écrire la matrice A sous la forme $A = P \times D \times P^{-1}$ où P est une matrice carrée inversible et D une matrice carrée diagonale. Dans ce cas,

$$A^p = \underbrace{\left(P \times D \times P^{-1}\right) \times \ldots \times \left(P \times D \times P^{-1}\right)}_{p \text{ facteurs}} = PD^pP^{-1}.$$

D^p se calcule facilement. Par exemple au format 2, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a^p & 0 \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$.

Les dangers de la multiplication des matrices

Danger n° 1. La multiplication des matrices n'est pas commutative. On peut avoir $A \times B \neq B \times A$. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Danger n° 2. Puisque la multiplication n'est pas commutative, on peut avoir $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$. La matrice $(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$ est égale à $A^2 + AB + BA + B^2$. Cette dernière matrice est égale à $A^2 + 2AB + B^2$ si et seulement si $AB = BA$ ou encore si et seulement si les matrices carrées A et B commutent.

Danger n° 3. On peut avoir $B \neq C$ et $A \times B = A \times C$ ou encore

$$A \times B = A \times C \not\Rightarrow B = C.$$

Ainsi, on ne peut pas simplifier une matrice pour la multiplication de part et d'autre d'une égalité.

Danger n° 4. On peut avoir $A \neq 0_n$, $B \neq 0_n$ et $A \times B = 0_n$. Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
La phrase « un produit de facteurs est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul » est donc une phrase fausse.

Danger n° 5. On peut avoir $(AB)^2 \neq A^2B^2$. Par définition, $(AB)^2 = ABAB$ et $A^2B^2 = AABB$. Si $BA \neq AB$, les matrices $(AB)^2$ et A^2B^2 peuvent être différentes.

Ecriture matricielle d'un système d'équations linéaires

Le système $\left\{\begin{array}{l} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{array}\right.$ peut s'écrire matriciellement $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. De manière générale, un système de n équations linéaires à n inconnues $x_1, \ldots, x_n$ peut s'écrire $AX = B$ où A est une matrice carrée de format n, B est un vecteur colonne de format n et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Théorème. Si la matrice carrée A est inversible, alors le système $AX = B$ admet une solution et une seule à savoir $X = A^{-1}B$.
On dit dans ce cas que le système est un **système de Cramer**.

Généralités sur la récurrence $X_{n+1} = AX_n + B$

A est une matrice carrée de format p et B est un vecteur colonne de format p. On considère la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs colonnes de format p définie par son premier terme X_0 et la relation de récurrence

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ X_{n+1} = AX_n + B.$$

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si chacune des « suites coordonnées » de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Théorème. Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers un vecteur colonne X vérifiant $X = AX + B$.
En cas de convergence vers X, le vecteur colonne X est appelé **état stable** du système.

Théorème. Si la matrice carrée $I_p - A$ est inversible, il existe un vecteur colonne X et un seul vérifiant $X = AX + B$ à savoir $X = (I_p - A)^{-1}B$.

Si de plus $B = 0$, on peut calculer X_n en fonction de n.

$$\text{si pour tout entier naturel } n,\ X_{n+1} = AX_n, \text{ alors pour tout entier naturel } n,\ X_n = A^nX_0.$$