La loi normale

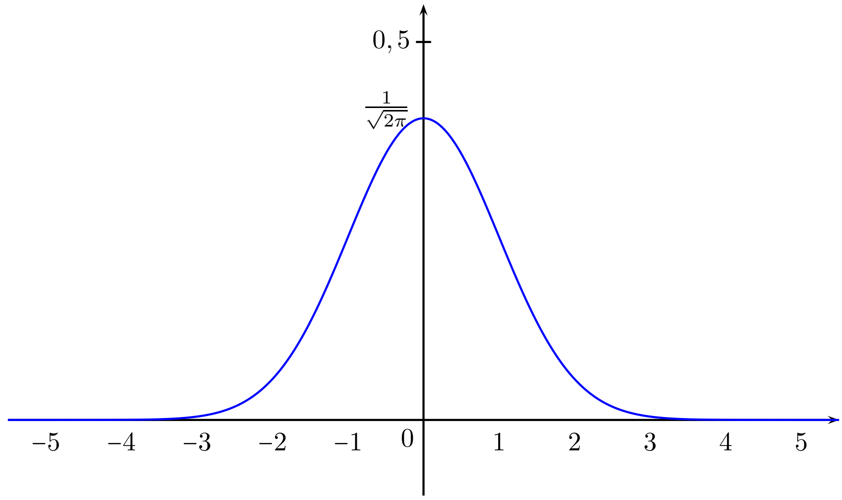
La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

1) Densité de probabilité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

La loi normale centrée réduite est la loi de densité de probabilités la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ est le « courbe de Gauss » ou « courbe en cloche » :



2) Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

1) Pour tous réels a et b, $p(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

2) Pour tout réel x, $p(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

On ne sait pas calculer les intégrales précédentes aux moyens des fonctions usuelles. La calculatrice fournit des valeurs approchées des probabilités ci-dessus.

3) Espérance, variance, écart-type de la loi normale centrée réduite

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. $E(X) = 0$, $V(X) = 1$ et $\sigma(X) = 1$.

4) Le fractile u_α

Théorème. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Pour tout réel $\alpha \in]0,1]$, il existe un réel positif u_α et un seul tel que $p(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.

On doit connaître en particulier $u_{0,05} = 1,959\ldots$ et $u_{0,01} = 2,575\ldots$

La loi normale de paramères μ et σ $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

1) Définition de $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

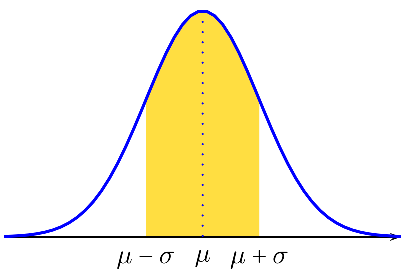
Soient μ un réel et σ un réel strictement positif. Soit X une variable aléatoire continue. X suit la loi normale de paramètres μ et σ si et seulement si la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

2) Espérance, variance, écart-type de la loi normale de paramètres μ et σ

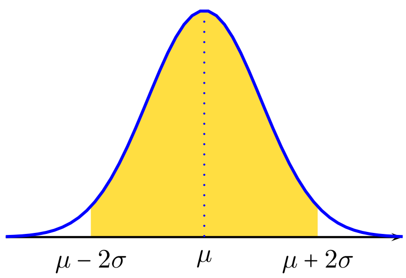
Théorème. Soient μ un réel et σ un réel strictement positif. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres σ et μ. $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$ et $\sigma(X) = \sigma$.

3) Un, deux ou trois écarts-types

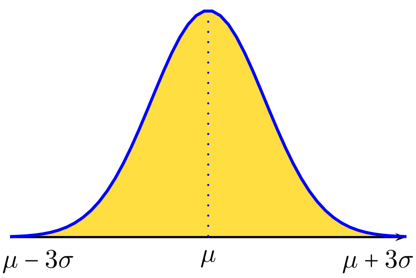
On doit connaître sans prendre la calculatrice la probabilité que X appartienne à $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$ ou $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$ ou $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$ (les valeurs ci-dessous sont des valeurs approchées).



$p(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$



$p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = \approx 0,95$



$p(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,99$

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Théorème de Moivre-Laplace. Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p où n est un entier naturel non nul et p est un réel de $]0,1[$.
Soient $\mu_n = E(X_n) = np$ et $\sigma_n = \sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$.
Soit $Z_n = \dfrac{X_n - \mu_n}{\sigma_n}$ la variable centrée réduite associée à X_n. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
Alors, pour tous réels a et b,

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(a \leqslant Z_n \leqslant b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = p(a \leqslant Z \leqslant b)$$

ou aussi

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(np + a\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + b\sqrt{np(1-p)}\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Dans la pratique, on approche $p(a \leqslant Z_n \leqslant b)$ par $p(a \leqslant Z \leqslant b)$ quand $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

Une conséquence du théorème de Moivre-Laplace est :

Théorème. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} p\left(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha\right) = 1 - \alpha$.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.