Les nombres complexes

Forme algébrique

Partie réelle, partie imaginaire

La forme algébrique d'un nombre complexe est $a + ib$ où a et b sont deux réels.
Si $z = a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, a est la partie réelle de z, notée $\text{Re}(z)$, et b est la partie imaginaire de z, notée $\text{Im}(z)$.

La partie réelle et la partie imaginaire d'un complexe sont des nombres réels.

La partie imaginaire de $3 + 2i$ est 2 et n'est pas $2i$.

Les réels sont les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle.
Les imaginaires purs sont les nombres complexes dont la partie réelle est nulle.

Egalité de deux nombres complexes sous forme algébrique

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires.

Pour tous RÉELS a et b, $a + ib = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

Pour tous RÉELS a, a', b et b', $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

Opérations dans $\mathbb{C}$.

On calcule dans $\mathbb{C}$ comme on calcule dans $\mathbb{R}$.

Addition des complexes. Pour tous réels a, b, a' et b', $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$.

Multiplication des complexes. Pour tous réels a, b, a' et b', $(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.
En particulier, $i^2 = -1$.

Inverse d'un complexe non nul. Pour tous réels a et b tels que $a + ib \neq 0$, $\dfrac{1}{a + ib} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$.
On obtient l'inverse d'un nombre complexe non nul $a + ib$ (où a et b sont des réels) en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction $\dfrac{1}{a + ib}$ par $a - ib$ qui est le conjugué du dénominateur.

Conjugué

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = a + ib$ où a et b sont deux réels. Le conjugué de z est $\overline{z} = a - ib$.

Pour tout nombre complexe z, z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
Pour tout nombre complexe z, z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

Propriétés de calculs. « Le conjugué marche bien avec tout » :

Pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
Pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
Pour tout nombre complexe non nul z, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.
Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe non nul z', $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Exemple. Pour x réel et z complexe, $\overline{\left(\dfrac{1 + 2i - z}{(1 + iz)^2} + e^{i\theta}(1 + ix)^2(3 - 2i)\right)} = \dfrac{1 - 2i - \overline{z}}{(1 - i\overline{z})^2} + e^{-i\theta}(1 - ix)^2(3 + 2i)$.

Attention, le conjugué de z n'est pas $-z$ mais est $\overline{z}$.

Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = a + ib$ où a et b sont deux réels. Le module de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, a et b réels, $z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.
Pour tout nombre complexe non nul z, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z \times \overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Propriétés de calculs. « Le module marche bien avec la multiplication » :

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Pour tous nombres complexes z et z', $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $|z^n| = |z|^n$.
Pour tout nombre complexe non nul z, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe non nul z', $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

« Le module ne marche pas bien avec l'addition » :

Pour tous nombres complexes z et z', $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

L'équation du second degré dans $\mathbb{C}$ à coefficients réels

Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on note δ un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$.
On note (E) l'équation $az^2 + bz + c = 0$, équation d'inconnue complexe z. Dans tous les cas, (E) admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Plus précisément,

Si $\Delta > 0$,
(E) admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta = 0$,
(E) admet une solution réelle double (ou encore deux solutions confondues) :

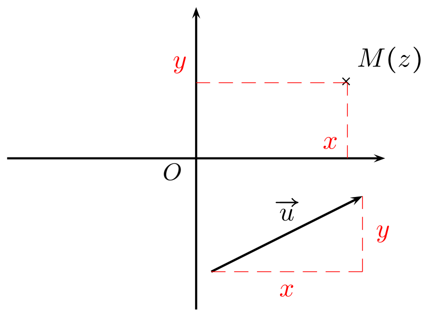
$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Si $\Delta < 0$,
(E) admet deux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Interprétation géométrique

Affixe d'un point, affixe d'un vecteur. Image ponctuelle, image vectorielle d'un nombre complexe



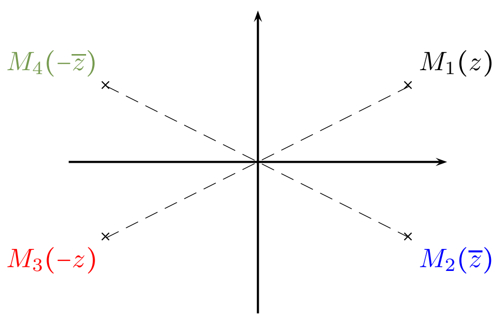
Si M est le point de coordonnées (x, y), l'affixe de M est le nombre $z_M = x + iy$.

Si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées (x, y), l'affixe de $\overrightarrow{u}$ est le nombre $z_{\overrightarrow{u}} = x + iy$.

Si $z = x + iy$ où x et y sont deux réels alors

- l'image ponctuelle de z est le point $M(x, y)$
- l'image vectorielle de z est le vecteur $\overrightarrow{u}(x, y)$

Opposé, conjugué d'un nombre complexe



Le point M_2 d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique par rapport à (Ox) du point M_1 d'affixe z.

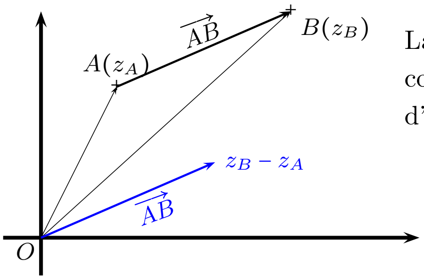
Le point M_3 d'affixe $-z$ est le symétrique par rapport à O du point M_1 d'affixe z.

Le point M_4 d'affixe $-\overline{z}$ est le symétrique par rapport à (Oy) du point M_1 d'affixe z.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Addition dans $\mathbb{C}$

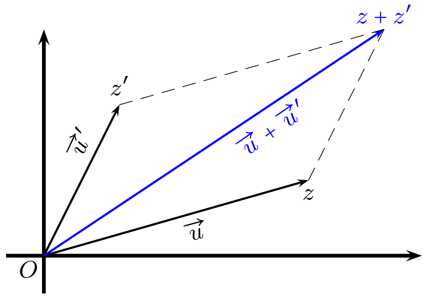
Différence de complexes



La différence de deux complexes est l'affixe d'un vecteur.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

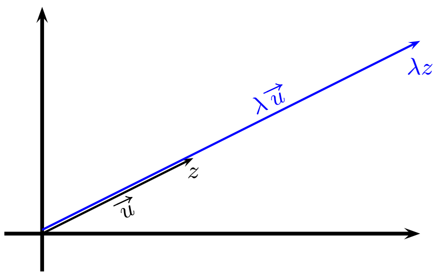
Somme de complexes



La somme de deux complexes est l'affixe de la somme de deux vecteurs.

$z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u'}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{u'}}$.

Multiplication d'un vecteur par un réel. Colinéarité de deux vecteurs



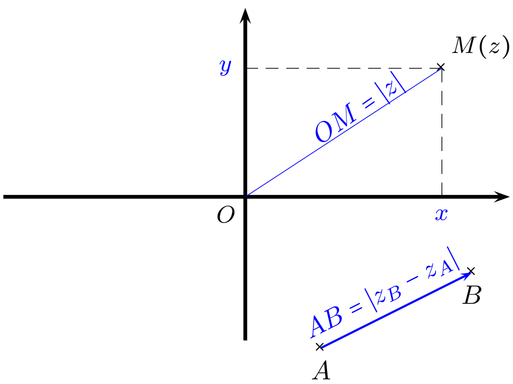
Si λ est un nombre réel,

$z_{\lambda\overrightarrow{u}} = \lambda z_{\overrightarrow{u}}$

Milieux. Barycentres

- Soient A et B deux points et I le milieu du segment $[AB]$. $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.
- Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

Module d'un nombre complexe



- x et y sont deux réels, $M(x, y)$ et $z = z_M = x + iy$.

  $|z| = OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$.

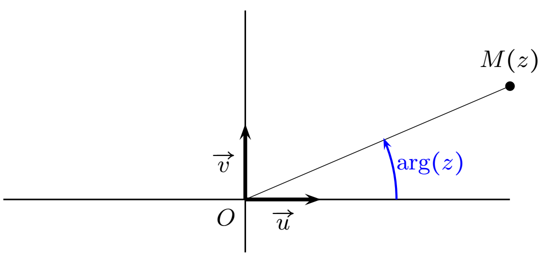
  $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

- A, B, C et D sont quatre points d'affixes respectives a, b, c et d $(b \neq a)$.

  $\left|\dfrac{d - c}{b - a}\right| = \dfrac{CD}{AB}$.

Forme trigonométrique

Argument d'un nombre complexe non nul



- Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
  z est un complexe non nul d'image ponctuelle notée M.
  On appelle argument de z toute mesure en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.

  $\arg(z) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)\ (2\pi)$.

- Si θ_0 est un argument de z, l'ensemble des arguments de z est l'ensemble des réels de la forme $\theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Détermination d'un argument. Si z est un complexe non nul, un argument de z est également un argument de $\dfrac{z}{|z|}$. Le nombre complexe $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1 et il existe un réel θ tel que $\dfrac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. θ est un argument de z.

Exemple. $\arg(-\sqrt{3}+i) = \arg\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \arg\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = \dfrac{5\pi}{6}\ (2\pi)$.

La notation $e^{i\theta}$

Le calcul $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) = \ldots = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$ invite à poser

pour tout réel θ, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Formulaire.

Pour tous réels θ et θ',

- $|e^{i\theta}| = 1$.
- $\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$, $\mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \sin(\theta)$.
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.
- Pour tout entier relatif n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Pour tous nombres complexes non nuls z et z',

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$.
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = \arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ (2\pi)$.
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ (2\pi)$.
- Pour tout entier relatif n, $\arg(z^n) = n\arg(z)\ (2\pi)$.

Forme trigonométrique (ou forme exponentielle) des nombres complexes

Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$ où r est un réel strictement positif et θ est un réel. Cette écriture est unique en ce sens que :

Pour tous réels strictement positifs r et r' et tous réels θ et θ',
$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow r = r'$ et $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$.

Si z est un complexe non nul, l'écriture $z = re^{i\theta}$ s'appelle **la** forme trigonométrique (ou la forme exponentielle) de z.

Forme trigonométrique d'un complexe non nul z : $z = re^{i\theta}$ où r est le module de z et θ est un argument de z.

Le réel θ lui n'est pas unique :

Pour tous réels strictement positifs r et r' et tous réels θ et θ',
$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow r = r'$ et il existe un entier relatif k tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$.

On trouve la forme trigonométrique de z en mettant le module de z en facteur. Par exemple

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

Si r et θ sont des réels quelconques et si $z = re^{i\theta}$, la forme trigonométrique de z n'est pas toujours $re^{i\theta}$.

– si $r > 0$, la forme trigonométrique de z est $re^{i\theta}$;
– si $r < 0$, la forme trigonométrique de z est $-re^{i(\theta+\pi)}$;
– si $r = 0$, $z = 0$ et la forme trigonométrique de z n'existe pas.