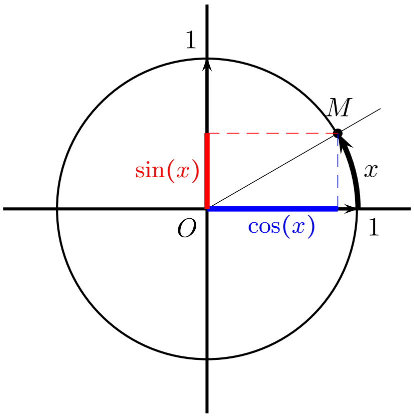
Trigonométrie

Définition du sinus et du cosinus d'un réel

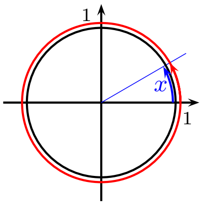
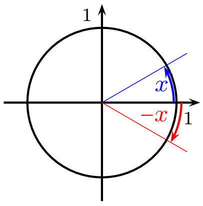
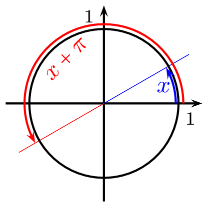
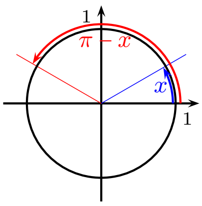
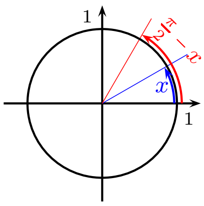
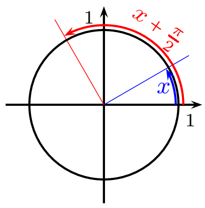


- x est un réel.
- M est le point du cercle trigonométrique associé à x,

  ou encore x est une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$.

  $\cos(x)$ est l'abscisse de M, $\sin(x)$ est l'ordonnée de M.
- Pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Arcs associés

Tour complet	Angle opposé	Demi-tour
 $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$	 $\cos(-x) = \cos(x)$ $\sin(-x) = -\sin(x)$	 $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
Angle supplémentaire	**Angle complémentaire**	**Quart de tour direct**
 $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$	 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$	 $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

- La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire.
- La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire.

Formules d'addition

$$\begin{aligned}
\cos(a + b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\
\cos(a - b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\\
\sin(a + b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\\
\sin(a - b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)
\end{aligned}$$

Formules de duplication

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Résolution d'équations

- $\cos(a) = \cos(b)$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{l}\text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } b = a + 2k\pi\\ \text{ou}\\ \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } b = -a + 2k\pi\end{array}\right.$

- $\sin(a) = \sin(b)$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{l}\text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } b = a + 2k\pi\\ \text{ou}\\ \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } b = \pi - a + 2k\pi\end{array}\right.$

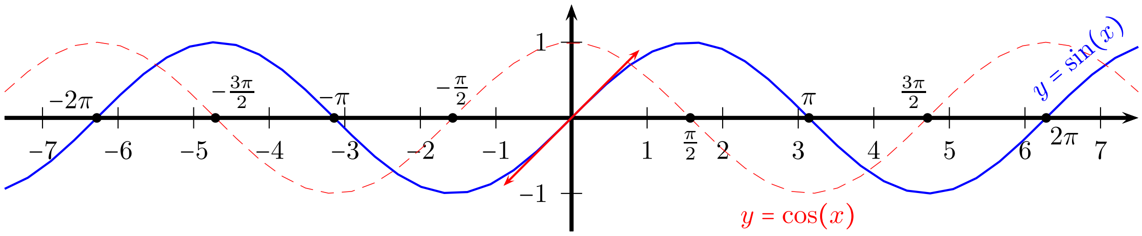
© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Fonctions sinus et cosinus

Valeurs usuelles

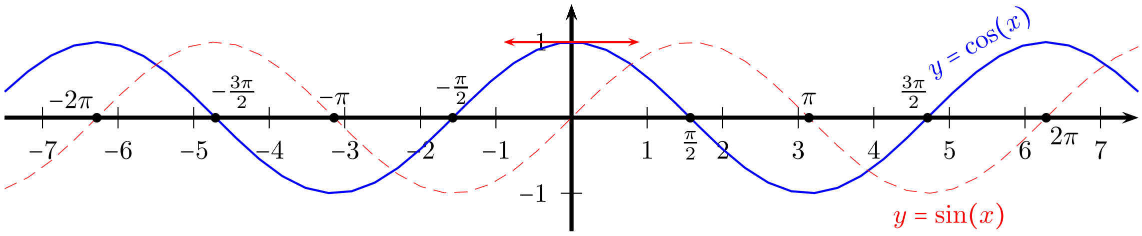
x en radians	0	$\frac{\pi}{6} = 0,52\ldots$	$\frac{\pi}{4} = 0,78\ldots$	$\frac{\pi}{3} = 1,04\ldots$	$\frac{\pi}{2} = 1,57\ldots$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707\ldots$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86\ldots$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86\ldots$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707\ldots$	$\frac{1}{2} = 0,5$	0

Représentation graphique de la fonction sinus

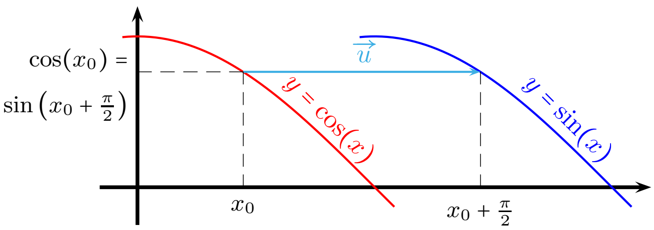


- La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire.
- Nombre dérivé en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$.
- La fonction sinus est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Représentation graphique de la fonction cosinus



- La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire.
- Nombre dérivé en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$.
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\cos'(x) = -\sin(x)$.
- La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.



Pour tout réel x, on a $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.

Le point $(x_0 + \frac{\pi}{2}, \sin(x_0 + \frac{\pi}{2})) = (x_0 + \frac{\pi}{2}, \cos(x_0))$ est le translaté du point $(x_0, \cos(x_0))$ par la translation de vecteur $\vec{u}(0, \frac{\pi}{2})$.

Le graphe de la fonction sinus est l'image du graphe de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\vec{u}(0, \frac{\pi}{2})$

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.