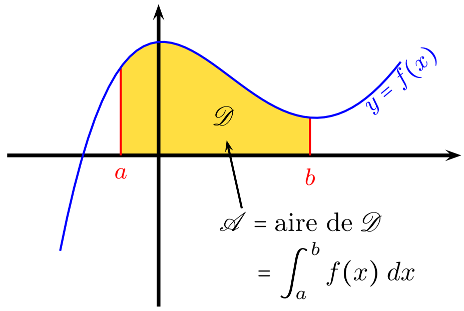
Intégration

Définition de l'intégrale

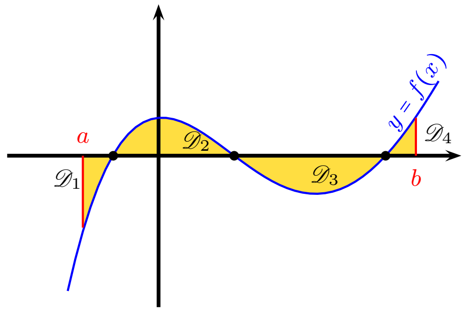
Un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ étant fixé, l'unité d'aire est l'aire du carré $OIKJ$ où $I(1,0)$, $K(1,1)$ et $J(0,1)$ (l'aire du carré $OIKJ$ vaut 1 par définition).



f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$.
$\mathscr{D}$ est le domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.
L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ est l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)\,dx$ car il est obtenu en $\int$ommant les aires des rectangles de longueur $f(x)$ et de largeur infinitésimale dx quand x varie de a à b.

Si f n'est pas de signe constant sur $[a,b]$, l'intégrale de f sur $[a,b]$ est la différence de la somme des aires des domaines situés au-dessus de (Ox) et de la somme des aires des domaines situés au-dessous de (Ox).



$$\int_a^b f(x)\,dx = -\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_3 + \mathscr{A}_4.$$

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$. La valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Propriétés de l'intégrale

• Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$. Alors $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et λ un réel. Alors $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$.

• Positivité de l'intégrale, croissance de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si a et b sont deux réels de I tels que $a \leqslant b$ et si pour tout réel x de $[a,b]$, on a $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Si a et b sont deux réels de I tels que $a \leqslant b$ et si pour tout réel x de $[a,b]$, on a $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

• Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$. Si m et M sont deux réels tels que pour tout réel x de $[a,b]$, on ait $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors $m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$.

• Relation de Chasles

Convention : On pose $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c de I, on a

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Primitives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale

Théorème fondamental

- Si f est continue sur l'intervalle I, alors f admet des primitives sur I.

- Si F est une primitive de la fonction f sur l'**intervalle** I, les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + C$ où C est une constante réelle.
- Si f est continue sur l'intervalle I alors, pour tout réel a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I. Ainsi, pour tout réel x de I,

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Expression d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I. Soit F une primitive de f sur I. Pour tous réels a et b de I,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Notation. Le nombre $F(b) - F(a)$ est noté $[F(x)]_a^b$.

Remarque. Si f est une fonction **continue** sur I, les notions d'intégrale et de primitive sont directement liées par la relation

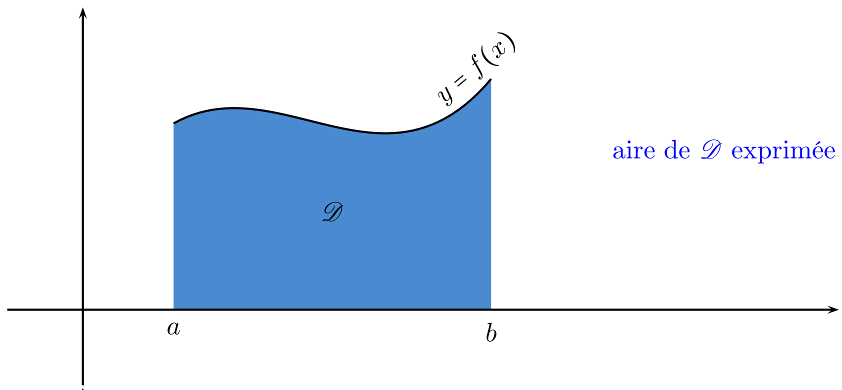
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Mais il existe des fonctions dont on sait calculer l'intégrale et qui n'admettent pas de primitive. Les fonctions en escaliers fournissent des exemples de fonctions dont on sait calculer l'intégrale sans pouvoir fournir de primitives.

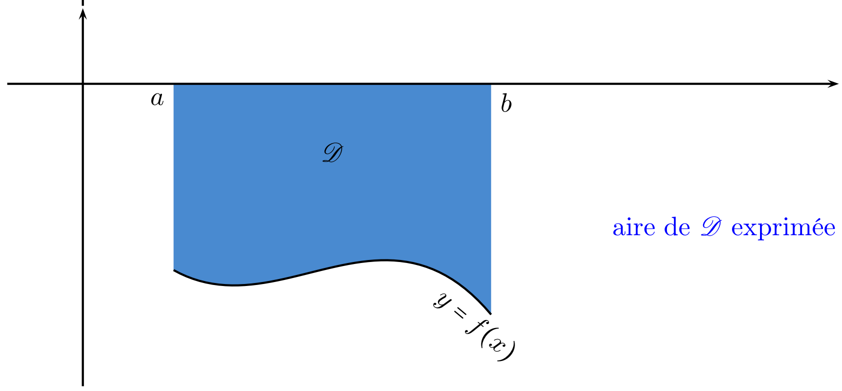
On doit connaître une bonne fois pour toutes :

$$\int_a^b \lambda\,dx = \lambda(b - a).$$

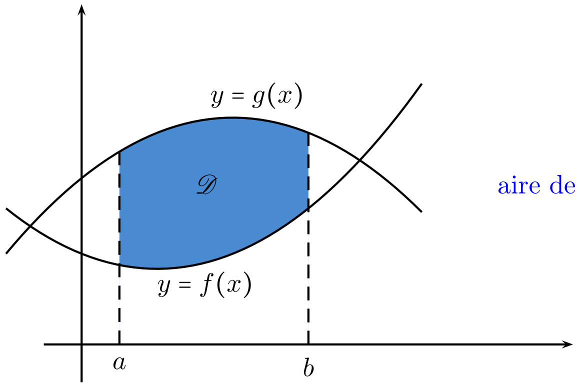
Calculs d'aires



aire de $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire $= \int_a^b f(x)\,dx$



aire de $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire $= \int_a^b (-f(x))\,dx$



aire de $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire $= \displaystyle\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$