Limites de fonctions

Définitions

Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ et ℓ un réel.

- On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ avec A réel contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ avec A réel contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

On a des énoncés analogues et intuitifs pour toutes les autres situations.

Opérations sur les limites

Dans les tableaux suivants, x tend vers un réel x_0 ou vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

f a pour limite	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$f\times g$ a pour limite	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

f a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
g a pour limite	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$	0 en étant >0	0 en étant >0	0 en étant <0	0 en étant <0	0
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

Limites et inégalités.

Théorème des gendarmes. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une borne de I (a réel ou infini).
Si f, g et h sont trois fonctions définies sur I telles que, pour tout réel x de I, $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ et si les fonctions f et h ont vers une limite réelle commune ℓ en a, alors la fonction g a une limite réelle en a et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell$.

Théorème. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une borne de I (a réel ou infini).
Soient f et g deux fonctions définies sur I telles que, pour tout réel x de I, $f(x)\leqslant g(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Asymptotes parallèles aux axes.

Si $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers x_0 réel, la droite d'équation $x=x_0$ est asymptote à la courbe de f.
Si $f(x)$ tend vers ℓ réel quand x tend vers $\pm\infty$, la droite d'équation $y=\ell$ est asymptote à la courbe de f.

Formes indéterminées.

Quand on calcule des limites, les formes suivantes sont indéterminées :

Les quatre formes indéterminées.

$$+\infty-\infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0\times\infty$$