Généralités sur les fonctions

Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

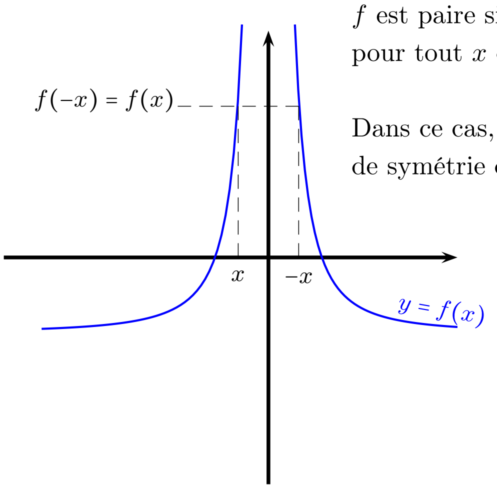
- f est **croissante** sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.
  f est **décroissante** sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.
- f est **strictement croissante** sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, $a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$.
  f est **strictement décroissante** sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, $a < b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$.
- f est **monotone** sur I si et seulement si f est croissante sur I ou f est décroissante sur I.
  f est **strictement monotone** sur I si et seulement si f est strictement croissante sur I ou f est strictement décroissantesur I.
- f est **constante** sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, $f(a) = f(b)$ ou encore f est constante sur I si et seulement si f est à la fois croissante et décroissante sur I.

Extrema des fonctions

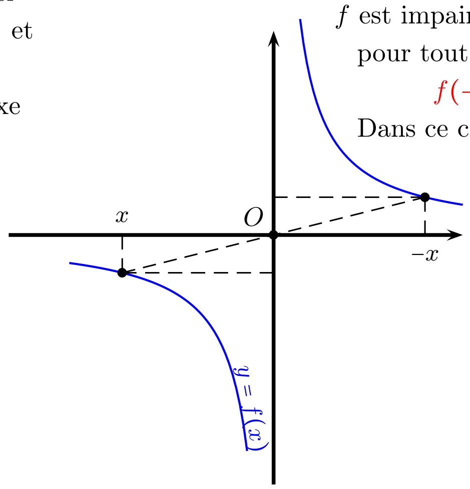
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- On dit que f admet un **maximum** en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est le maximum de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$.
  On dit que f admet un **minimum** en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est le minimum de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si pour tout réel x de I, on a $f(x) \geqslant f(x_0)$.
- On dit que f admet un **maximum local** en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est un maximum local de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que, pour tout réel x de $I \cap J$, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$.
  On dit que f admet un **minimum local** en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est un minimum local de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que, pour tout réel x de $I \cap J$, on a $f(x) \geqslant f(x_0)$.
- On dit que f admet un **extremum** en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est un extremum de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si f admet un maximum en x_0 ou f admet un minimum en x_0.
  On dit que f admet un **extremum local** en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est un extremum local de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si f admet un maximum local en x_0 ou f admet un minimum local en x_0.

Fonction paires et impaires

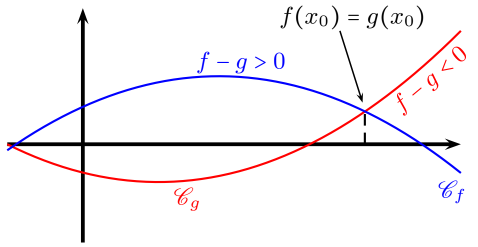


f est paire si et seulement si pour tout x de $\mathscr{D}_f$, $-x \in \mathscr{D}_f$ et
$f(-x) = f(x)$.
Dans ce cas, (Oy) est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.



f est impaire si et seulement si pour tout x de $\mathscr{D}_f$, $-x \in \mathscr{D}_f$ et
$f(-x) = -f(x)$.
Dans ce cas, O est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

Positions relatives de courbes. Intersection de courbes



- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
- Le signe de $f - g$ fournit les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$:
  - si $f - g > 0$ sur I $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur I,
  - si $f - g < 0$ sur I $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur I.