Raisonnement par récurrence

$\mathscr{P}(n)$ désigne une certaine propriété dépendant d'un entier n et n_0 désigne un entier naturel donné.
On veut démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Pour cela, on procède en quatre étapes :

Etape 1. On réécrit explicitement la propriété à démontrer sans oublier de préciser les valeurs de n pour lesquelles cette propriété est vraie ($n \geqslant n_0$).

Etape 2 (initialisation). On vérifie que $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie.

Etape 3 (hérédité). On se donne un entier $n \geqslant n_0$ quelconque.
On suppose que pour cet entier n la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie (c'est l'hypothèse de récurrence) et on montre que sous cette hypothèse la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Etape 4 (conclusion). On conclut en encadrant le résultat : $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n) \text{ est vraie}}$.

Exemple 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

Solution 1.

① Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

② Si $n = 0$, $4 - \frac{1}{2^{n-1}} = 4 - 2 = 2 = u_0$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.

③ Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$ et montrons que $u_{n+1} = 4 - \frac{1}{2^{(n+1)-1}}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + 2 \\
&= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + 2 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= 2 - \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}} + 2 = 4 - \frac{1}{2^{(n+1)-1}}.
\end{aligned}$$

④ On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

Exemple 2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 6$, $2^n \geqslant 6n + 7$.

Solution 2.

① Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 6$, $2^n \geqslant 6n + 7$.
② Si $n = 6$, $2^n = 2^6 = 64$ et $6n + 7 = 6 \times 6 + 7 = 43$. Comme $43 < 64$, l'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 6$.
③ Soit $n \geqslant 6$. Supposons que $2^n \geqslant 6n + 7$ et montrons que $2^{n+1} \geqslant 6(n+1) + 7$.

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\
&\geqslant 2(6n+7) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= 12n + 14 = 6(n+1) + 7 + 6n + 1 \\
&\geqslant 6(n+1) + 7.
\end{aligned}$$

④ On a montré par récurrence que,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 6,\ 2^n \geqslant 6n + 7.}$$

Exemple 3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^{2n} + 2$ est un entier divisible par 3.

Solution 3.

① Montrons par récurrence que pour tout entier n, $2^{2n} + 2$ est un entier divisible par 3.
② Si $n = 0$, $2^{2n} + 2 = 2^0 + 2 = 3$ qui est bien un entier divisible par 3. L'affirmation de l'énoncé est vraie quand $n = 0$.
③ Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $2^{2n} + 2$ est un entier divisible par 3, et montrons que $2^{2(n+1)} + 2$ est un entier divisible par 3. On a

$$2^{2(n+1)}+2=2^{2n+2}+2=4\times 2^{2n}+2=3\times 2^{2n}+1\times 2^{2n}+2=2^{2n}+2+3\times 2^{2n}.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe un entier naturel k tel que $2^{2n}+2=3k$. Mais alors,

$$2^{2(n+1)}+2=2^{2n}+2+3\times 2^{2n}=3k+3\times 2^{2n}=3(2^{2n}+k).$$

Comme $2^{2n}+k$ est un entier, on en déduit que $2^{2(n+1)}+2$ est un entier divisible par 3.

④ On a montré par récurrence que,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 2^{2n}+2 \text{ est un entier divisible par 3.}}$$