Suites : exercices

Les réponses aux questions sont disponibles à la fin du document

Exercice 1 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = n^2 - n + 1$.
a) Calculer U_0 et U_{10}.
b) Exprimer, en fonction de n, $U_n + 1$ et U_{n+1}.

Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \dfrac{1}{n+1}$.
a) Exprimer $U_{n+1} - U_n$ en fonction de n.
b) En déduire le sens de variation de la suite (U_n).

Exercice 3 :

Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison $a = \dfrac{1}{2}$.
a) Exprimer U_n en fonction de n.
b) Calculer U_{10} et $U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{10}$.

Exercice 4 :

Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_4 = 5$ et $U_{11} = 19$.
Calculer la raison a et U_0 .

Exercice 5 :

Calculer les sommes suivantes :
a) $S_1 = 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 121$
b) $S_2 = 5 + 2 - 1 - 4 - 7 \cdots - 34$.

Exercice 6 :

Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 7$ et de raison $b = 3$.
a) Exprimer U_n en fonction de n.
b) Calculer U_5 et $U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_5$.

Exercice 7 :

Calculer la somme $S = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} \cdots + \dfrac{1}{512}$.

Exercice 8 :

On suppose que chaque année la production d'une usine subit une baisse de 4%.
Au cours de l'année 2000, la production a été de 25000 unités.
a) On note $P_0 = 25000$ et P_n la production prévue au cours de l'année $(2000 + n)$.
Montrer que (P_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
b) Calculer la production de l'usine en 2005.

Exercice 9 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 6$ et $U_{n+1} = \dfrac{3 + 2U_n}{5}$ (pour tout $n \geqslant 0$).
a) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 1$ (pour tout $n \geqslant 0$).
Montrer que $V_{n+1} = \dfrac{2}{5} V_n$ (pour tout $n \geqslant 0$).
En déduire que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison b et le premier terme V_0.

b) Déduire de la question précédente que $U_n = 1 + 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$. (pour tout $n \geqslant 0$).

c) Montrer que $U_{n+1} - U_n = -3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$. (pour tout $n \geqslant 0$).

En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

d) Exprimer en fonction de n la somme : $V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

En déduire que $U_0 + U_1 + \cdots + U_n = \frac{25}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) + n + 1$. (pour tout $n \geqslant 0$).

Réponses exercice 1 :

a) $U_0 = 0^2 - 0 + 1 = 1$ et $U_{10} = 10^2 - 10 + 1 = 91$.

b) $U_n + 1 = (n^2 - n + 1) + 1 = n^2 - n + 2$

$U_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1$.

Réponses exercice 2 :

a) $U_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2}$

Donc, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$.

b) Pour tout n, $U_{n+1} - U_n < 0$. Donc la suite est décroissante.

Réponses exercice 3 :

a) $U_n = U_0 + n \times a = 4 + \frac{1}{2}n$.

b) $U_{10} = 4 + \frac{1}{2} \times 10 = 9$.

$U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{10} = 11 \times \frac{4+9}{2} = \frac{143}{2}$.

Réponses exercice 4 :

$U_{11} = U_4 + (11-4) \times a \Leftrightarrow 19 = 5 + 7a \Leftrightarrow a = 2$.

$U_4 = U_0 + 4 \times a \Leftrightarrow 5 = U_0 + 8 \Leftrightarrow U_0 = -3$.

Réponses exercice 5 :

a) $S_1 = 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 121$ (somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2).

nombre de termes = $\frac{121-5}{2} + 1 = 59$.

$S_1 = 59 \times \frac{5+121}{2} = 3717$

b) $S_2 = 5 + 2 - 1 - 4 - 7 \cdots - 34$ (somme des termes d'une suite arithmétique de raison -3).

nombre de termes = $\frac{-34-5}{-3} + 1 = 14$.

$S_2 = 14 \times \frac{5-34}{2} = -203$

Réponses exercice 6 :

a) $U_n = b^n \times U_0 = 7 \times 3^n$.

b) $U_5 = 7 \times 3^5 = 1701$.

$U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_5 = 7 \times \frac{1-3^6}{1-3} = 2548$.

Réponses exercice 7 :

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison $b=-\dfrac{1}{2}$.
$S=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}\cdots+\dfrac{1}{512}$.
$-\dfrac{1}{2}S=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}\cdots-\dfrac{1}{1024}$.
En effectuant la différence des deux lignes, on obtient :
$\dfrac{3}{2}S=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1024}=\dfrac{513}{1024}$. D'où $S=\dfrac{513}{1024}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{171}{512}$.

Réponses exercice 8 :

a) Pour tout n, $P_{n+1}=P_n-\frac{4}{100}P_n=\left(1-\frac{4}{100}\right)P_n=0,96\times P_n$.
Cela prouve que (P_n) est une suite géométrique de raison 0,96 .
b) $P_5=b^5\times P_0=(0,96)^5\times 25000\approx 20384$.

Réponses exercice 9 :

a) $V_{n+1}=U_{n+1}-1=\dfrac{3+2U_n}{5}-1=\dfrac{2U_n-2}{5}=\dfrac{2}{5}(U_n-1)=\dfrac{2}{5}V_n$.
La suite (V_n) est donc géométrique de raison $b=\dfrac{2}{5}$ et de premier terme $V_0=U_0-1=5$.
b) $V_n=b^n\times V_0=5\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
Or, $V_n=U_n-1$. Donc, $U_n=1+V_n=1+5\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
c) $U_{n+1}-U_n=1+5\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}-1-5\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=5\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}-5\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$
$=5\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\times\left(\dfrac{2}{5}-1\right)=5\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\times\left(\dfrac{-3}{5}\right)=-3\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n<0$.
La suite (U_n) est bien décroissante.
d) $V_0+V_1+\cdots+V_n=V_0\times\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}=5\times\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{25}{3}\left(1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$.
$U_0+U_1+\cdots+U_n=(V_0+1)+(V_1+1)+\cdots+(V_n+1)$
$=V_0+V_1+\cdots+V_n+(n+1)=\dfrac{25}{3}\left(1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}\right)+n+1$.